

Dieses Dokument wurde von **Christian Buth** erstellt.

Es ist auf meinen Internetseiten unter

<http://www.Christian.Buth.mysite.de>

*frei* erhältlich.

Sollten Sie Probleme mit der Anzeige haben oder einen

Fehler entdecken, wenden Sie sich bitte an

[cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de](mailto:cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de) .

© 2000 Christian Buth. Dieser Text ist nach allen nationalen und internationalen Gesetzen urheberrechtlich geschützt. Das Verändern und anschließende Veröffentlichen unter meinem Namen ist verboten - auch auszugsweise. Das Veröffentlichen und Verbreiten unter einem anderen als meinem Namen ist nicht erlaubt. Das Dokument darf jedoch zu nichtkommerziellen Zwecken verbreitet und kopiert werden, sofern es unverändert bleibt. Kommerzielle Nutzung jeglicher Art - auch auszugsweise - ist nur mit einer schriftlichen Erlaubnis des Autors gestattet.

# Feldquantisierung

von

ARMIN STEINKASSERER

und

CHRISTIAN BUTH

16.06.2000

Seminarvortrag im Theoretisch Physikalischen Seminar über  
Probleme der Quantenmechanik.

Dieses Material ist unter  
<http://www.Christian.Buth.mysite.de>  
erhältlich.

# Motivation

- Zweite Quantisierung
- Nichtrelativistischen Quantenfeldtheorie
- Erzeugung und Vernichtung von Teilchen
- Emission und Absorption von Photonen

# FOCK-Darstellung

- Vollständiges Orthonormalsystem  $\{\phi_\mu\}$
- $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N$  *identische* Teilchen
- Vektor in FOCK-Darstellung  $|n_1, n_2, \dots > \equiv |n_\mu >$
- Erzeugungsoperator

$$a_i^\dagger |n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots > \\ = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, \dots >$$

- Vernichtungsoperator

$$a_i |n_1, \dots, n_i, \dots > \\ = \begin{cases} \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots > & ; n_i \neq 0 \\ 0 & ; n_i = 0 \end{cases}$$

- Vertauschungsrelationen

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}] = [a_\lambda^\dagger, a_{\lambda'}^\dagger] = 0 \\ [a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

# Feldoperatoren

- Ortsdarstellung

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(\vec{x}) \quad \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\dagger \phi_i^*(\vec{x})$$

- Erzeugungsoperator  $\Psi^\dagger(\vec{x})$
- Vernichtungsoperator  $\Psi(\vec{x})$
- Umkehrtransformation

$$a_i = \int_V \Phi_i^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) d^3x$$

$$a_i^\dagger = \int_V \Phi_i(\vec{x}) \Psi^\dagger(\vec{x}) d^3x$$

- Vertauschungsrelationen

$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi(\vec{x}', t)] = [\Psi^\dagger(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] = 0$$
$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

# Lagrange Formalismus

- HAMILTONsches Prinzip

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} L[\Phi(\vec{x}, t), \dot{\Phi}(\vec{x}, t)] dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}[\Phi(\vec{x}, t), \Phi_k(\vec{x}, t), \dot{\Phi}(\vec{x}, t)] d^3x dt = 0 \end{aligned}$$

- Bezeichnungen  $\dot{\Phi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t}$  und  $\Phi_k(\vec{x}, t) = \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial x_k}$  für  $k = 1, 2, 3$ .
- Ausführen der Variation ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) d^3x dt \delta \Phi = 0$$

- Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = 0$$

# Hamilton Formalismus

- Kanonisch konjugierte Felder

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}$$

- Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} & H(\Phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t)) \\ &= \int_V \mathfrak{H}[\Phi(\vec{x}, t), \Phi_k(\vec{x}, t), \dot{\Phi}(\vec{x}, t)] d^3x \\ &= \int_V (\pi(\vec{x}, t) \dot{\Phi}(\vec{x}, t) - \mathcal{L}) d^3x \end{aligned}$$

# Das Schrödingerfeld als klassisches Feld

## 1

- Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t)$$

- Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = i\hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - V(\vec{x}, t) \Psi^* \Psi$$

- Unabhängige Felder  $\Psi(\vec{x}, t)$ ,  $\Psi^*(\vec{x}, t)$

# Das Schrödingerfeld als klassisches Feld

## 2

- Differentiation der Lagrangedichte

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\hbar\Psi^*(\vec{x}, t) \quad \tilde{\pi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^*} \equiv 0$$

- Hamiltondichte

$$\mathfrak{H} = \pi \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi + V(\vec{x}, t) \Psi^* \Psi$$

- Hamiltonfunktion

$$H = \int_V \mathfrak{H} d^3x = \int_V \Psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}, t) \right) \Psi d^3x$$

# Feldquantisierung: Bosonen 1

- Quantisierung mittels Ersetzung der Felder durch Feldoperatoren

$$\begin{aligned}\Psi^*(\vec{x}, t) &\rightarrow \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}, t) & \Psi(\vec{x}, t) &\rightarrow \hat{\Psi}(\vec{x}, t) \\ \pi(\vec{x}, t) &\rightarrow \hat{\pi}(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

- Hamiltonoperator

$$H = \int_V \Psi^\dagger \left( \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}, t)}_h \right) \Psi \, d^3x$$

- $\vec{x}$  ist *kein* Operator!
- Heisenberggleichungen

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} &= [\Psi(\vec{x}, t), H] \\ i\hbar \frac{\partial \pi(\vec{x}, t)}{\partial t} &= [\pi(\vec{x}, t), H]\end{aligned}$$

# Feldquantisierung: Bosonen 2

- Kommutatoren für die Quantisierung eines Bosonenfeldes

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{x}, t), \Psi(\vec{x}', t)] &= [\Psi^\dagger(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] = 0 \\ [\Psi(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

- Hamiltonoperator in die Heisenberggleichung eingesetzt

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} &= [\Psi(\vec{x}, t), H] \\ &= [\Psi(\vec{x}, t), \int_V \Psi^\dagger(\vec{x}', t) h(\vec{x}') \Psi(\vec{x}', t) d^3x'] \\ &= \int_V [\Psi(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] h(\vec{x}') \Psi(\vec{x}', t) d^3x' \\ &= h(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

# Feldquantisierung: Bosonen 3

- Entwicklung nach einem vollständigen Orthonormal- system

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_i a_i \Phi_i(\vec{x}) \quad \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_i a_i \Phi_i^*(\vec{x})$$

$$a_i = \int_V \Phi_i^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) d^3x$$

$$a_i^\dagger = \int_V \Phi_i(\vec{x}) \Psi^\dagger(\vec{x}) d^3x$$

- Vakuumzustand  $\Psi(\vec{x})|0\rangle = 0$

- Ortsdarstellung

$$|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \Psi^\dagger(\vec{x}_1, t) \dots \Psi^\dagger(\vec{x}_n, t) |0\rangle$$

- Projektion auf den Ortsraum

$$\begin{aligned} & \Phi_{[n_1, n_2, \dots]}^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \\ &= \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t | n_1, n_2, \dots \rangle \end{aligned}$$

# Feldquantisierung: Bosonen 4

- Vielteilchen Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{[n_1, n_2, \dots]}^{(n)}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) \\ = & i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t | n_1, n_2, \dots \rangle \\ = & i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \Psi(\vec{x}_1, t) \dots \Psi(\vec{x}_n, t) | n_1, \dots \rangle \\ = & \sum_i \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \Psi(\vec{x}_1, t) \dots \Psi(\vec{x}_{i-1}, t) \\ & \cdot \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V(\vec{x}_i) \right) \Psi(\vec{x}_i, t) \\ & \cdot \Psi(\vec{x}_{i+1}, t) \dots \Psi(\vec{x}_n, t) | n_1, n_2, \dots \rangle \\ = & \sum_i \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_i + V(\vec{x}_i) \right) \Phi_{[n_1, \dots]}^{(n)}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \end{aligned}$$

- Bose-Einstein-Statistik

# Feldquantisierung: Fermionen 1

- Antikommutator

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

- Ersetzung der Kommutatoren durch die Antikommutatoren

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{x}, t), \Psi(\vec{x}', t)]_+ &= [\Psi^\dagger(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)]_+ = 0 \\ [\Psi(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)]_+ &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

- Quantisierungsbedingungen für die Leiteroperatoren

$$\begin{aligned} [a_\lambda, a_{\lambda'}]_+ &= [a_\lambda^\dagger, a_{\lambda'}^\dagger]_+ = 0 \\ [a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger]_+ &= \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

- Beschreibt die Theorie Fermionen?

$$a_i^\dagger a_i^\dagger |0\rangle = 0$$

# Feldquantisierung: Fermionen 2

- Bewegungsgleichung der Operatoren

$$[\Psi(\vec{x}, t), \int_V \Psi^\dagger(\vec{x}', t) h(\vec{x}') \Psi(\vec{x}', t) d^3r]_+ = h\Psi(\vec{x}, t)$$

- Der Formalismus ist jetzt vollständig entwickelt und muss nun seine Tragfähigkeit anhand konkreter physikalischer Systeme beweisen.

# Literatur

- [1] Gerald Grawert. *Quantenmechanik*. AULA-Verlag, 5. edition, 1989.
- [2] Walter Greiner. *Feldquantisierung*, volume 7A of *Theoretische Physik*. Harri Deutsch, 1. edition, 1993.
- [3] Eugen Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, 1997.
- [4] Leonard Schiff. *Quantum Mechanics*. International series in pure and applied physics. McGraw Hill, 3. edition, 1988.