Feldquantisierung

von

ARMIN STEINKASSERER

und

CHRISTIAN BUTH

16.06.2000

Seminarvortrag im Theoretisch Physikalischen Seminar über Probleme der Quantenmechanik.

Dieses Material ist unter
`http://www.Christian.Buth.mysite.de`
erhältlich.

Motivation

- Zweite Quantisierung
- Nichtrelativistischen Quantenfeldtheorie
- Erzeugung und Vernichtung von Teilchen
- Emission und Absorption von Photonen

Fock-Darstellung

- Vollständiges Orthonormalsystem $\{\phi_\mu\}$
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} n_i = N$ *identische* Teilchen
- Vektor in Fock-Darstellung $|n_1, n_2, \ldots > \equiv |n_\mu >$
- Erzeugungsoperator

$$\begin{aligned} &a_i^\dagger |n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \ldots > \\ =& \sqrt{n_i + 1} |n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, \ldots > \end{aligned}$$

- Vernichtungsoperator

$$a_i |n_1, \ldots, n_i, \ldots >$$

$$= \begin{cases} \sqrt{n_i} |n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots > & ;\ n_i \neq 0 \\ 0 & ;\ n_i = 0 \end{cases}$$

- Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [a_\lambda, a_{\lambda'}] = [a_\lambda^\dagger, a_{\lambda'}^\dagger] = 0 \\ [a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

Feldoperatoren

- Ortsdarstellung

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(\vec{x}) \qquad \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\dagger \phi_i^*(\vec{x})$$

- Erzeugungsoperator $\Psi^\dagger(\vec{x})$
- Vernichtungsoperator $\Psi(\vec{x})$
- Umkehrtransformation

$$\begin{aligned} a_i &= \int_V \Phi_i^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3 x \\ a_i^\dagger &= \int_V \Phi_i(\vec{x}) \Psi^\dagger(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3 x \end{aligned}$$

- Vertauschungsrelationen

$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi(\vec{x}', t)] = [\Psi^\dagger(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] = 0$$
$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)] = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Lagrange Formalismus

- HAMILTONsches Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L[\Phi(\vec{x},t), \dot{\Phi}(\vec{x},t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathfrak{L}[\Phi(\vec{x},t), \Phi_k(\vec{x},t), \dot{\Phi}(\vec{x},t)]\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t = 0$$

- Bezeichnungen $\dot{\Phi}(\vec{x},t) = \frac{\partial\Phi(\vec{x},t)}{\partial t}$ und $\Phi_k(\vec{x},t) = \frac{\partial\Phi(\vec{x},t)}{\partial x_k}$ für $k = 1, 2, 3$.

- Ausführen der Variation ergibt

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) \mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t\,\delta\Phi = 0$$

- Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\Phi}} = 0$$

Hamilton Formalismus

- Kanonisch konjugierte Felder

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\Phi}}$$

- Legendre-Transformation

$$\begin{aligned}
& H(\Phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x},t)) \\
= & \int\limits_V \mathfrak{H}[\Phi(\vec{x},t), \Phi_k(\vec{x},t), \dot{\Phi}(\vec{x},t)]\,\mathrm{d}^3x \\
= & \int\limits_V \left(\pi(\vec{x},t)\dot{\Phi}(\vec{x},t) - \mathfrak{L}\right)\mathrm{d}^3x
\end{aligned}$$

Das Schrödingerfeld als klassisches Feld 1

- Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{x},t) + V(\vec{x},t)\Psi(\vec{x},t)$$

- Lagrangedichte

$$\mathfrak{L} = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - V(\vec{x},t)\Psi^*\Psi$$

- Unabhängige Felder $\Psi(\vec{x},t)$, $\Psi^*(\vec{x},t)$

Das Schrödingerfeld als klassisches Feld 2

- Differentiation der Lagrangedichte

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\hbar \Psi^*(\vec{x},t) \qquad \tilde{\pi}(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\Psi}^*} \equiv 0$$

- Hamiltondichte

$$\mathfrak{H} = \pi \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \mathfrak{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi + V(\vec{x},t) \Psi^* \Psi$$

- Hamiltonfunktion

$$H = \int\limits_V \mathfrak{H} \, \mathrm{d}^3x = \int\limits_V \Psi^* \Big(- \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x},t) \Big) \Psi \, \mathrm{d}^3x$$

Feldquantisierung: Bosonen 1

- Quantisierung mittels Ersetzung der Felder durch Feldoperatoren

$$\Psi^*(\vec{x},t) \to \hat{\Psi}^\dagger(\vec{x},t) \qquad \Psi(\vec{x},t) \to \hat{\Psi}(\vec{x},t)$$
$$\pi(\vec{x},t) \to \hat{\pi}(\vec{x},t)$$

- Hamiltonoperator

$$H = \int_V \Psi^\dagger \Big(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x},t)}_{h} \Big) \Psi \, \mathrm{d}^3 x$$

- $\vec{x}$ ist *kein* Operator!

- Heisenberggleichungen

$$i\hbar \tfrac{\partial \Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = [\Psi(\vec{x},t), H]$$
$$i\hbar \tfrac{\partial \pi(\vec{x},t)}{\partial t} = [\pi(\vec{x},t), H]$$

Feldquantisierung: Bosonen 2

- Kommutatoren für die Quantisierung eines Bosonenfeldes

$$[\Psi(\vec{x},t),\Psi(\vec{x}',t)] = [\Psi^\dagger(\vec{x},t),\Psi^\dagger(\vec{x}',t)] = 0$$
$$[\Psi(\vec{x},t),\Psi^\dagger(\vec{x}',t)] = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

- Hamiltonoperator in die Heisenberggleichung eingesetzt

$$\begin{aligned}
& i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} \\
= \quad & [\Psi(\vec{x},t),H] \\
= \quad & [\Psi(\vec{x},t),\int\limits_V \Psi^\dagger(\vec{x}',t)h(\vec{x}')\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{d}^3x'] \\
= \quad & \int\limits_V [\Psi(\vec{x},t),\Psi^\dagger(\vec{x}',t)]h(\vec{x}')\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{d}^3x' \\
= \quad & h(\vec{x})\Psi(\vec{x},t)
\end{aligned}$$

Feldquantisierung: Bosonen 3

- Entwicklung nach einem vollständigen Orthonormal-system

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_i a_i \Phi_i(\vec{x}) \quad \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_i a_i \Phi_i^*(\vec{x})$$

$$a_i = \int\limits_V \Phi_i^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3 x$$

$$a_i^\dagger = \int\limits_V \Phi_i(\vec{x}) \Psi^\dagger(\vec{x}) \, \mathrm{d}^3 x$$

- Vakuumzustand $\Psi(\vec{x})|0 >= 0$

- Ortsdarstellung

$$|\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, t >= \frac{1}{\sqrt{n!}} \Psi^\dagger(\vec{x}_1, t) ... \Psi^\dagger(\vec{x}_n, t)|0 >$$

- Projektion auf den Ortsraum

$$\Phi^{(n)}_{[n_1, n_2, \ldots]}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, t)$$
$$=< \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, t | n_1, n_2, \ldots >$$

Feldquantisierung: Bosonen 4

- Vielteilchen Schrödingergleichung

$$
\begin{aligned}
& i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{(n)}_{[n_1,n_2,\ldots]}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n,t) \\
= \; & i\hbar\frac{\partial}{\partial t} < \vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n,t|n_1,n_2,\ldots > \\
= \; & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{n!}} < 0|\Psi(\vec{x}_1,t)\ldots\Psi(\vec{x}_n,t)|n_1,\ldots > \\
= \; & \sum_i \frac{1}{\sqrt{n!}} < 0|\Psi(\vec{x}_1,t)\cdots\Psi(\vec{x}_{i-1},t) \\
& \cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i + V(\vec{x}_i)\right)\Psi(\vec{x}_i,t) \\
& \cdot\Psi(\vec{x}_{i+1},t)\cdots\Psi(\vec{x}_n,t)|n_1,n_2,\ldots > \\
= \; & \sum_i\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta_i + V(\vec{x}_i)\right)\Phi^{(n)}_{[n_1,\cdots]}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,t)
\end{aligned}
$$

- Bose-Einstein-Statistik

Feldquantisierung: Fermionen 1

- Antikommutator

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

- Ersetzung der Kommutatoren durch die Antikommutatoren

$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi(\vec{x}', t)]_+ = [\Psi^\dagger(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)]_+ = 0$$
$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi^\dagger(\vec{x}', t)]_+ = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

- Quantisierungsbedingungen für die Leiteroperatoren

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}]_+ = [a_\lambda^\dagger, a_{\lambda'}^\dagger]_+ = 0$$
$$[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger]_+ = \delta_{\lambda\lambda'}$$

- Beschreibt die Theorie Fermionen?

$$a_i^\dagger a_i^\dagger |0> = 0$$

Feldquantisierung: Fermionen 2

- Bewegungsgleichung der Operatoren

$$[\Psi(\vec{x},t), \int\limits_V \Psi^\dagger(\vec{x}',t)h(\vec{x}')\Psi(\vec{x}',t)\,\mathrm{d}^3r]_+ = h\Psi(\vec{x},t)$$

- Der Formalismus ist jetzt vollständig entwickelt und muss nun seine Tragfähigkeit anhand konkreter physikalischer Systeme beweisen.

Literatur

[1] Gerald Grawert. *Quantenmechanik*. AULA-Verlag, 5. edition, 1989.

[2] Walter Greiner. *Feldquantisierung*, volume 7A of *Theoretische Physik*. Harri Deutsch, 1. edition, 1993.

[3] Eugen Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, 1997.

[4] Leonard Schiff. *Quantum Mechanics*. International series in pure and applied physics. McGraw Hill, 3. edition, 1988.

