Inhaltsverzeichnis

1 Dichte

A1/1 [2]: Eine Goldfolie besitzt bei einer Fläche von 0,46 dm^2 die Masse 81 mg. Berechnen Sie daraus ihre mittlere Dicke $\varrho_{\mathrm{Au}} = 19{,}3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

gegeben:

$$
\begin{aligned}
A &= 0{,}46\ \mathrm{dm}^2 \cdot \tfrac{100\ \mathrm{cm}^2}{\mathrm{dm}^2} = 46\ \mathrm{cm}^2 && : \text{Fläche der Goldfolie}\\
m &= 81\ \mathrm{mg} \cdot \tfrac{1\ \mathrm{g}}{1000\ \mathrm{mg}} = 0{,}081\ \mathrm{g} && : \text{Masse der Folie}\\
\varrho_{\mathrm{Au}} &= 19{,}3\ \tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} && : \text{Dichte von Gold}
\end{aligned}
$$

gesucht: d

allgemeine Lösung:

Das Volumen des Goldes, aus dem die Folie besteht kann über die Gleichung für einen Quader berechnet werden $V = l \cdot b \cdot d$. Die Grundfläche $A = l \cdot b$ ist gegeben. Das Volumen ist also $V = A \cdot d \iff d = \frac{V}{A}$. Das Volumen wiederum ergibt sich aus der Dichte und der Masse, da $\varrho = \frac{m}{V} \iff V = \frac{m}{\varrho}$ gilt. Einsetzen führt führt allgemeinen Lösung

$$d = \frac{V}{A} \wedge V = \frac{m}{\varrho_{\mathrm{Au}}} \iff d = \frac{m}{A \cdot \varrho_{\mathrm{Au}}}.$$

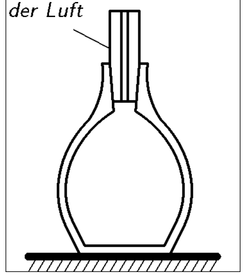
spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{0{,}081\ \mathrm{g\,cm}^3}{46\ \mathrm{cm}^2 \cdot 19{,}3\ \mathrm{g}}\\
&= 9{,}1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm} \cdot \frac{1\ \mathrm{m} \cdot 10^6\ \mu\mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm} \cdot 1\ \mathrm{m}}\\
&= 0{,}91\ \mu\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Die Dicke der Goldfolie beträgt 0,91 μm.

A1/2 [2]: Bestimmen Sie die Dichte von Gesteinskörnern aus folgenden Wägungen mit einem Pyknometer $\left(\varrho_{\mathrm{Aq}} = 1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$:

Masse des leeren Pyknometers	27,35 g
Masse des mit Wasser gefüllten Pyknometers	76,28 g
Masse des Pyknometers mit Gesteinskörnern	59,11 g
Masse des Pyknometers mit Wasser und Körnern	96,84 g



gegeben:

$m_{\mathrm{Py}} = 27{,}35$ g	: Leeres Pyknometer
$m_{\mathrm{Py,\,Aq}} = 76{,}28$ g	: Pyknometer mit Wasser
$m_{\mathrm{Py,\,Ge}} = 59{,}11$ g	: Pyknometer mit Gesteinskörnern
$m_{\mathrm{Py,\,Aq,\,Ge}} = 96{,}84$ g	: Pyknometer mit Wasser und Körnern
$\varrho_{\mathrm{Aq}} = 1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	: Dichte von Wasser

gesucht: ϱ_{Ge}

allgemeine Lösung:

Die Masse der Gesteinskörner beträgt $m_{\mathrm{Ge}} = m_{\mathrm{Py,\,Ge}} - m_{\mathrm{Py}}$. Die Masse des Wassers des vollen Meßkolbens ist $m_{\mathrm{Aq}} = m_{\mathrm{Py,\,Aq}} - m_{\mathrm{Py}}$. Die Masse des Wassers, daß neben den Gesteinskörnern in dem Pyknometer vorhanden ist, ist $m_{\mathrm{Aq,\,r}} = m_{\mathrm{Py,\,Aq,\,Ge}} - m_{\mathrm{Py,\,Ge}}$, da die Masse des Pyknometers und die der Gesteinskörner durch die Subtraktion wegfallen. Die Masse des, von den Gesteinskörnern verdrängten, Wassers ergibt sich durch Subtraktion der Gesamtwassermasse m_{Aq} von der verbliebenen Wassermasse $m_{\mathrm{Aq,\,r}}$ zu

$$\begin{aligned} & m_{\mathrm{Aq,\,v}} = m_{\mathrm{Aq}} - m_{\mathrm{Aq,\,r}} \\ \Longleftrightarrow\ & m_{\mathrm{Aq,\,v}} = m_{\mathrm{Py,\,Aq}} - m_{\mathrm{Py}} - \left(m_{\mathrm{Py,\,Aq,\,Ge}} - m_{\mathrm{Py,\,Ge}}\right) \\ & \phantom{m_{\mathrm{Aq,\,v}}} = m_{\mathrm{Py,\,Aq}} - m_{\mathrm{Py}} - m_{\mathrm{Py,\,Aq,\,Ge}} + m_{\mathrm{Py,\,Ge}}. \end{aligned}$$

Das Volumen des verdrängten Wassers $\varrho_{\mathrm{Aq}} = \frac{m_{\mathrm{Aq,\,v}}}{V_{\mathrm{Aq,\,v}}} \iff V_{\mathrm{Aq,\,v}} = \frac{m_{\mathrm{Aq,\,v}}}{\varrho_{\mathrm{Aq}}}$ ist gleich dem Volumen der Gesteinskörner. Einsetzen in die Gleichung der Dichte für die Körner ergibt

$$\varrho_{\mathrm{Ge}} = \frac{m_{\mathrm{Ge}}}{V_{\mathrm{Ge}}} \ \wedge\ m_{\mathrm{Ge}} = m_{\mathrm{Py,\,Ge}} - m_{\mathrm{Py}} \ \wedge\ V_{\mathrm{Ge}} = \frac{m_{\mathrm{Aq,\,v}}}{\varrho_{\mathrm{Aq}}}$$

$$\Longleftrightarrow \varrho_{\mathrm{Ge}} = \frac{m_{\mathrm{Py,\,Ge}} - m_{\mathrm{Py}}}{\frac{m_{\mathrm{Aq,\,v}}}{\varrho_{\mathrm{Aq}}}} \ \wedge \ m_{\mathrm{Aq,\,v}} = m_{\mathrm{Py,\,Aq}} - m_{\mathrm{Py}} - m_{\mathrm{Py,\,Aq,\,Ge}} + m_{\mathrm{Py,\,Ge}}$$

$$\Longleftrightarrow \varrho_{\mathrm{Ge}} = \frac{\varrho_{\mathrm{Aq}} \cdot (m_{\mathrm{Py,\,Ge}} - m_{\mathrm{Py}})}{m_{\mathrm{Py,\,Aq}} - m_{\mathrm{Py}} - m_{\mathrm{Py,\,Aq,\,Ge}} + m_{\mathrm{Py,\,Ge}}}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathrm{Ge}} &= \frac{1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot (59{,}11\ \mathrm{g} - 27{,}35\ \mathrm{g})}{76{,}28\ \mathrm{g} - 27{,}35\ \mathrm{g} - 96{,}84\ \mathrm{g} + 59{,}11\ \mathrm{g}} \\ &= 2{,}836\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \end{aligned}$$

Die Gesteinskörner haben eine Dichte von $2{,}836\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

<u>**A1/3 [2]:**</u> Ein zylindrisches, oben offenes Glasgefäß $\left(\varrho_{\mathrm{Gl}} = 2{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ hat einen Außendurchmesser von 132 mm, eine Außenhöhe von 150 mm und eine Wandstärke von 2 mm. Es ist innen 62 mm hoch mit Quecksilber gefüllt $\left(\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13{,}6\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$. Welche Gesamtmasse hat das Gefäß?

<u>Anleitung:</u> Zur Vereinfachung der Rechnung zeige man, daß das Volumen eines Zylindermantels $V_{\mathrm{m}} = d_{\mathrm{m}} \cdot \pi \cdot s \cdot h$ ist. (d_{m} mittlerer Durchmesser, s Wandstärke, h Zylinderhöhe) Das Eigenvolumen der Gefäßwand wird dann $V = d_{\mathrm{m}} \cdot \pi \cdot s \cdot h_{\mathrm{i}} + \frac{\pi \cdot d_{\mathrm{a}}^2}{4} \cdot s$

gegeben:

$d_{\mathrm{a}} = 132\ \mathrm{mm} \cdot \frac{1\ \mathrm{cm}}{10\ \mathrm{mm}} = 13{,}2\ \mathrm{cm}$	: Außendurchmesser
$s = 2\ \mathrm{mm} \cdot \frac{1\ \mathrm{cm}}{10\ \mathrm{mm}} = 0{,}2\ \mathrm{cm}$	: Wandstärke
$h_{\mathrm{a}} = 150\ \mathrm{mm} \cdot \frac{1\ \mathrm{cm}}{10\ \mathrm{mm}} = 15{,}0\ \mathrm{cm}$	: Außenhöhe
$h_{\mathrm{Hg}} = 62\ \mathrm{mm} \cdot \frac{1\ \mathrm{cm}}{10\ \mathrm{mm}} = 6{,}2\ \mathrm{cm}$	: Höhe des Quecksilberspiegels

gesucht: m

allgemeine Lösung:

Die gesamte Masse ist die Summe der Teilmassen, aus Glas und Quecksilber $m = m_{\mathrm{Gl}} + m_{\mathrm{Hg}}$. Zur Massenberechnung benötigt man diverse Volumina. Das Volumen V_{m} eines Zylindermantels ist die Differenz zwischen umbeschriebenem Zylinder mit dem Außenradius r_{a} und dem einbeschriebenen Zylinder mit dem Innenradius r_{i}

$$V_{\mathrm{m}} = \pi \cdot r_{\mathrm{a}}^2 \cdot h - \pi \cdot r_{\mathrm{i}}^2 \cdot h$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \cdot h \cdot (r_\mathrm{a}^2 - r_\mathrm{i}^2) \\
&= \pi \cdot h \cdot (r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i}) \cdot (r_\mathrm{a} + r_\mathrm{i}) \ \wedge \ s = r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i} \\
\iff V_\mathrm{m} &= \pi \cdot h \cdot s \cdot (r_\mathrm{a} + r_\mathrm{i}) \ \wedge \ r_\mathrm{a} = \frac{d_\mathrm{a}}{2} \ \wedge \ r_\mathrm{i} = \frac{d_\mathrm{i}}{2} \\
\iff V_\mathrm{m} &= \pi \cdot h \cdot s \cdot \left(\frac{d_\mathrm{a}}{2} + \frac{d_\mathrm{i}}{2} \right) \\
&= \pi \cdot h \cdot s \cdot \left(\frac{d_\mathrm{a} + d_\mathrm{i}}{2} \right) \ \wedge \ d_\mathrm{m} = \frac{d_\mathrm{a} + d_\mathrm{i}}{2} \\
&= \pi \cdot h \cdot s \cdot d_\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Die Bodenfläche des Zylinders ist wiederum ein kleiner Zylinder, dessen Volumen sich aus der Fläche $\pi \cdot \frac{d_\mathrm{a}^2}{4}$ und der Wandstärke s berechnet. Das Eigenvolumen der Gefäßwand ist dann die Summe aus Mantelvolumen und Bodenvolumen $V_\mathrm{Gl} = \pi \cdot d_\mathrm{m} \cdot s \cdot h_\mathrm{i} + \frac{\pi \cdot d_\mathrm{a}^2}{4} \cdot s = \pi \cdot s \cdot \left(d_\mathrm{m} \cdot h_\mathrm{i} + \frac{d_\mathrm{a}^2}{4} \right)$. Aus der Gleichung für die Dichte errechnet sich die Masse des Glases zu $\varrho_\mathrm{Gl} = \frac{m_\mathrm{Gl}}{V_\mathrm{Gl}} \iff m_\mathrm{Gl} = \varrho_\mathrm{Gl} \cdot V_\mathrm{Gl}$. Die Masse des Gefäßes ist mit $h_\mathrm{i} = h_\mathrm{a} - s$ folglich

$$
m_\mathrm{Gl} = \pi \cdot \varrho_\mathrm{Gl} \cdot s \cdot \left(d_\mathrm{m} \cdot (h_\mathrm{a} - s) + \frac{d_\mathrm{a}^2}{4} \right).
$$

Das Volumen des Quecksilbers ist wieder eine Zylindervolumenberechnung $V_\mathrm{Hg} = \pi \cdot \frac{d_\mathrm{i}^2}{4} \cdot h_\mathrm{Hg}$. Die Masse des Quecksilbers ergibt sich mit $d_\mathrm{i} = d_\mathrm{a} - 2 \cdot s$ zu

$$
m_\mathrm{Hg} = \varrho_\mathrm{Hg} \cdot V_\mathrm{Hg} = \pi \cdot \varrho_\mathrm{Hg} \cdot \frac{(d_\mathrm{a} - 2 \cdot s)^2}{4} \cdot h_\mathrm{Hg}.
$$

Die Gesamtmasse ergibt sich mit $d_\mathrm{m} = \frac{d_\mathrm{a}+d_\mathrm{i}}{2} \wedge d_\mathrm{i} = d_\mathrm{a} - 2 \cdot s \iff d_\mathrm{m} = \frac{d_\mathrm{a}+d_\mathrm{a}-2\cdot s}{2} = d_\mathrm{a} - s$ zu $m = \pi \cdot \varrho_\mathrm{Gl} \cdot s \cdot \left((d_\mathrm{a} - s) \cdot (h_\mathrm{a} - s) + \frac{d_\mathrm{a}^2}{4} \right) + \pi \cdot \varrho_\mathrm{Hg} \cdot \frac{(d_\mathrm{a}-2\cdot s)^2}{4} \cdot h_\mathrm{Hg}$.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
m = {} & \pi \cdot 2{,}5\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 0{,}2\ \mathrm{cm} \cdot \Big((13{,}2\ \mathrm{cm} - 0{,}2\ \mathrm{cm}) \cdot (15\ \mathrm{cm} - 0{,}2\ \mathrm{cm}) + \\
& \frac{13{,}2^2\ \mathrm{cm}^2}{4} \Big) + \pi \cdot 13{,}6\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot \frac{(13{,}2\ \mathrm{cm} - 2 \cdot 0{,}2\ \mathrm{cm})^2}{4} \cdot 6{,}2\ \mathrm{cm} \\
= {} & 11200\ \mathrm{g} \cdot \frac{1\ \mathrm{kg}}{1000\ \mathrm{g}} \\
= {} & 11{,}2\ \mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

Das quecksilbergefüllte Glasgefäß hat eine Gesamtmasse von 11,2 kg.

Atmosphärischer Druck **A1/4 [2]:** Wegen der Kompressibilität der Luft sinkt die Dichte der Atmosphäre bei konstanter Temperatur mit steigender Höhe h nach der Beziehung $\varrho = \varrho_0 \cdot e^{-\frac{h}{7{,}99\ \mathrm{km}}}$. a) Wie groß ist die Gesamtmasse einer Luftsäule mit der Grundfläche $1\ \mathrm{cm}^2$ $\left(\varrho_0 = 1{,}293\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$? b) In welcher Höhe wird die halbe Gesamtmasse erreicht?

gegeben:

$$\varrho(h) = \varrho_0 \cdot e^{-\left(\frac{h}{7{,}99\ \mathrm{km}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}\right)} = \varrho_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}} \qquad \text{: Dichte der Luft}$$
$$A = 1\ \mathrm{cm}^2 \cdot \frac{1\ \mathrm{m}^2}{100^2\ \mathrm{cm}^2} = 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \qquad \text{: Fläche der Luftsäule}$$

gesucht: m, $h_{\frac{m}{2}}$

allgemeine Lösung:

a) Um die Masse der Luftsäule zu berechnen, muß man die Masse unendlich dünner Quader, mit der in der Aufgabenstellung angeführten Gleichung, berechnen und aufsummieren. Das Volumen eines solchen Quaders ist

$$\begin{aligned} &\varrho = \frac{m}{V} \\ \iff &\mathrm{d}m = A \cdot \varrho(h)\ \mathrm{d}h \ \wedge\ \varrho(h) = \varrho_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}} \\ \iff &\mathrm{d}m = A \cdot \varrho_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}}\ \mathrm{d}h. \end{aligned}$$

Integration ergibt die Masse der Luftsäule

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{+\infty} A \cdot \varrho_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}}\ \mathrm{d}h = \lim_{u \to +\infty} \left[-7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0 \cdot e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}}\right]_0^u \\ &= -7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0 \lim_{u \to +\infty} \left[e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}}\right]_0^u \\ &= -7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0 \cdot (0 - 1) = 7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0. \end{aligned}$$

b) Die Gesamtmasse der Luftsäule wurde unter a) berechnet. Die halbe Masse ist folglich $m_{\frac{1}{2}} = \frac{7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0}{2}$ und muß mit $m = -7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0 \left[e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}}\right]_0^u$ übereinstimmen, so daß sich

$$\begin{aligned} &\frac{7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0}{2} = -7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0 \left[e^{-\frac{h}{7990\ \mathrm{m}}}\right]_0^u \\ \iff &\frac{7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0}{2} = -7990\ \mathrm{m} \cdot A \cdot \varrho_0 \cdot \left(e^{-\frac{u}{7990\ \mathrm{m}}} - 1\right) \\ \iff &e^{-\frac{u}{7990\ \mathrm{m}}} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{u}{7990\ \mathrm{m}} = \ln\frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow u = 7990\ \mathrm{m}\cdot\ln 2$$
$$\Longrightarrow h_{\frac{m}{2}} = 7990\ \mathrm{m}\cdot\ln 2.$$

ergibt.

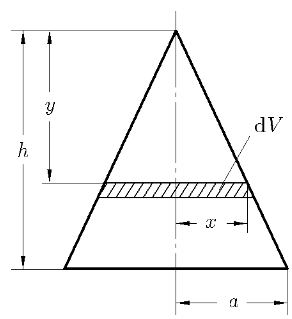
spezielle Lösung:

a) $m = 7990\ \mathrm{m}\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2\cdot 1{,}293\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
$= 1{,}033\ \mathrm{kg}$

b) $h_{\frac{m}{2}} = 7990\ \mathrm{m}\cdot\ln 2$
$= 5538\ \mathrm{m}\cdot\frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}}$
$= 5{,}538\ \mathrm{km}$

Die Luftsäule hat eine Masse von 1,033 kg. Schon in einer Höhe von 5,538 km hat sich die Masse der Luftsäule halbiert.

A1/5 [2]: Eine Gesteinspyramide hat eine quadratische Grundfläche mit der Kantenlänge $2a = 4$ dm und der Höhe $h = 4$ dm. Die Dichte beträgt an der Spitze $\varrho_1 = 2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, an der Basis $\varrho_2 = 3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und ändert sich linear mit der Höhe. Wie groß ist die Masse der Pyramide?



gegeben:

$h = 4\ \mathrm{dm}\cdot\frac{10\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{dm}} = 40\ \mathrm{cm}$	: Höhe der Pyramide
$a = 2\ \mathrm{dm}\cdot\frac{10\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{dm}} = 20\ \mathrm{cm}$	: Halbe Seitenlänge
$\varrho_1 = 2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	: Dichte an der Spitze
$\varrho_2 = 3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	: Dichte an der Basis

gesucht: m

allgemeine Lösung:

Als erstes ist eine Funktion zu ermitteln, die die Dichte in Abhängigkeit von der Lage der Gesteinsschicht angibt. Aus dem Aufgabentext geht hervor, daß diese Funktion linear ist ($y = m \cdot x + b$). Ihren Funktionsterm berechnet man durch zwei Punkte auf dem Graphen, nämlich $P_1(0\,\mathrm{m}/\varrho_1)$ und $P_2(h/\varrho_2)$. Die Steigung ist $m = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h-0}$, der Ordinatenabschnitt somit $\varrho_1 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot 0\,\mathrm{m} + b \iff b = \varrho_1$. Für die Dichtegleichung folgt $\varrho(\mathfrak{h}) = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h} + \varrho_1$. Es ist nun noch notwendig eine Querschnittsfunktion zu finden, die die Dichte einer Scheibe der Gesteinspyramide angibt. Die Funktion für die Kantenlänge, in Abhängigkeit von ihrer Entfernung von der Spitze der Pyramide, ist eine Ursprungsgerade. Die Steigung Funktion ist die Grundseitenlänge dividiert durch die Höhe der Pyramide. Die Kantenlänge verändert sich also wie folgend $a(\mathfrak{h}) = \frac{a}{h} \cdot \mathfrak{h}$. Die Querschnittsfunktion ergibt sich zu

Ordinatenabschnitt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}V = \left(2 \cdot a(\mathfrak{h})\right)^2 \cdot \varrho(\mathfrak{h})\,\mathrm{d}\mathfrak{h} \ \wedge\ \varrho(\mathfrak{h}) = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h} + \varrho_1 \\
\iff & \mathrm{d}V = 4 \cdot a^2(\mathfrak{h}) \cdot \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h} + \varrho_1\right) \mathrm{d}\mathfrak{h} \\
\iff & \mathrm{d}V = 4 \cdot a^2(\mathfrak{h}) \cdot \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h} + \varrho_1\right) \mathrm{d}\mathfrak{h} \ \wedge\ a(\mathfrak{h}) = \frac{a}{h} \cdot \mathfrak{h} \\
\iff & \mathrm{d}V = \frac{4 \cdot a^2}{h^2} \cdot \mathfrak{h}^2 \cdot \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h} + \varrho_1\right) \mathrm{d}\mathfrak{h}.
\end{aligned}$$

Die Integration dieser Funktion liefert dann die Masse der Pyramide

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^h \frac{4 \cdot a^2}{h^2} \cdot \mathfrak{h}^2 \cdot \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h} + \varrho_1\right) \mathrm{d}\mathfrak{h} \\
&= \frac{4 \cdot a^2}{h^2} \cdot \int_0^h \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{h} \cdot \mathfrak{h}^3 + \varrho_1 \cdot \mathfrak{h}^2 \,\mathrm{d}\mathfrak{h} \\
&= \frac{4 \cdot a^2}{h^2} \cdot \left[\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{4 \cdot h} \cdot \mathfrak{h}^4 + \frac{\varrho_1}{3} \cdot \mathfrak{h}^3\right]_0^h \\
&= \frac{4 \cdot a^2}{h^2} \cdot \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{4 \cdot h} \cdot h^4 + \frac{\varrho_1}{3} \cdot h^3\right) \\
&= 4 \cdot a^2 \cdot h \cdot \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{4} + \frac{\varrho_1}{3}\right) \\
&= 4 \cdot a^2 \cdot h \cdot \left(\frac{3 \cdot \varrho_2 - 3 \cdot \varrho_1}{12} + \frac{4 \cdot \varrho_1}{12}\right) \\
&= 4 \cdot a^2 \cdot h \cdot \left(\frac{3 \cdot \varrho_2 + \varrho_1}{12}\right) \\
&= a^2 \cdot h \cdot \frac{3 \cdot \varrho_2 + \varrho_1}{3}.
\end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$m = 20^2\ \mathrm{cm}^2 \cdot 40\ \mathrm{cm} \cdot \frac{3 \cdot 3\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} + 2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}{3}$$

$$
\begin{aligned}
&= 59000\ \text{g} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} \\
&= 59\ \text{kg}
\end{aligned}
$$

Die Gesteinspyramide wiegt 59 kg.

2 Bahnbewegungen

A2/1 [3]: Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit von 18,0 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welchen Weg legt er in 1,00 min zurück?

gegeben:

$$v = 18{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m} \cdot 1\ \text{h}}{1\ \text{km} \cdot 3600\ \text{s}} = 5{,}00\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad : \text{Geschwindigkeit des Radfahrers}$$
$$t = 1{,}00\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 60\ \text{s} \qquad : \text{Zeit des Bewegungsvorganges}$$

gesucht: s

allgemeine Lösung:

Da es sich bei der Fahrt des Radlers um eine geradlinige, gleichförmige Bewegung handelt, verwende ich hierzu die entsprechende Gleichung $v = \frac{s}{t}$, welche ich nach s auflöse $v = \frac{s}{t} \iff s = v \cdot t$.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} s &= 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60\ \text{s} \\ &= 300\ \text{m} \end{aligned}$$

Die vom Radler zurückgelegte Strecke beträgt 300 m.

A2/2 [3]: Ein Flugzeug hat gegenüber dem Erdboden eine Geschwindigkeit von 900 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In welcher Zeit legt es eine Strecke von 200 km zurück?

gegeben:

$v = 900\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m} \cdot 1\ \text{h}}{1\ \text{km} \cdot 3600\ \text{s}} = 250\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$: Geschwindigkeit des Flugzeugs

$s = 200\ \text{km} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 2{,}00 \cdot 10^5\ \text{m}$: zu durchfliegende Strecke

gesucht: t

allgemeine Lösung:

Da die Geschwindigkeit konstant ist, handelt es sich um eine geradlinige gleichförmige Bewegung. Um die gesuchte Zeit zu erhalten, löse ich die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ nach t auf $v = \frac{s}{t} \iff s = v \cdot t \iff t = \frac{s}{v}$.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 \cdot 10^5\ \text{m}}{250\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 800\ \text{s} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \\ &= 13\ \text{min} + \frac{1}{3}\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} \\ &= 13\ \text{min}\ \ 20\ \text{s} \end{aligned}$$

Das Flugzeug benötigt 13 min 20 s um die Strecke zurückzulegen.

A2/3 [3]: An einem Baum wurde nach einem Jahr ein Längenzuwachs von 60 cm gemessen. Wie groß war seine durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$? (1 a = 365 d)

gegeben:

$s = 60\ \text{cm} \cdot \frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}} = 0{,}6\ \text{m}$: Längenzuwachs des Baumes

$t = 1\ \text{a} \cdot \frac{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}}{1\ \text{a}} = 31536000\ \text{s}$: Zeit des Wachstums

gesucht: $\bar{v}$

allgemeine Lösung:

Da in der Aufgabenstellung nach der Durchschnittsgeschwindigkeit gefragt ist, verwende ich die Gleichung für die mittlere Geschwindigkeit einer Bewegung $\bar{v} = \frac{s}{t}$.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{0{,}6\ \mathrm{m}}{31536000\ \mathrm{s}} \\ &= 1{,}9 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{10^9\ \mathrm{nm}}{1\ \mathrm{m}} \\ &= 19\ \frac{\mathrm{nm}}{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

Der Baum wächst das Jahr über mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 19 $\frac{\mathrm{nm}}{\mathrm{s}}$.

<u>**A2/4 [5]:**</u> Ein Wagen durchfährt eine 1,6 km lange Teststrecke in 24 s. Wie groß ist die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$?

gegeben:

$s = 1{,}6\ \mathrm{km} \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} = 1600\ \mathrm{m}$	: Weg des Wagens
$t = 24\ \mathrm{s}$	: Zeit für die Bewegung

gesucht: v

allgemeine Lösung:

Da Weg und Zeit gegeben sind verwende ich die Definitionsgleichung der Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$, in die ich die Werte einsetze.

spezielle Lösung:

$$v = \frac{1600\ \mathrm{m}}{24\ \mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km} \cdot 3600\ \mathrm{s}}{1000\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{h}} = 240\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$= \frac{1600 \text{ m}}{24 \text{ s}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 4000 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$
$$= \frac{1600 \text{ m}}{24 \text{ s}} = 66{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Das Testfahrzeug durchfährt die Strecke mit einer Geschwindigkeit von 240 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A2/5 [5]: Wie groß ist die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, mit der a) die Erde um die Sonne, b) der Mond um die Erde läuft? (Astronomische Daten in den Tabellen im Anhang 22.3)

gegeben:

$R_\text{E} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m	: Entfernung Erde—Sonne
$t_\text{E} = 365{,}25 \text{ d} \cdot \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ d}} = 31557600 \text{ s}$	: Umlaufzeit Erde—Sonne
$R_\text{M} = 3{,}844 \cdot 10^{8}$ m	: Entfernung Erde—Mond
$t_\text{M} = 29{,}5306 \text{ d} \cdot \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ d}} = 2551444 \text{ s}$	: Umlaufzeit Mond—Erde

gesucht: v_E, v_M

allgemeine Lösung:

Um die durchschnittliche Geschwindigkeit der Bewegung der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde zu berechnen muß zuerst die zurückgelegte Strecke berechnet werden. Die Umlaufbahnen der Trabanten Erde und Mond, jeweils um Sonne und Erde, ist nahezu kreisförmig und die Umfangsberechnung ist die des Kreises $U = 2\pi r$. Für r wird dann jeweils die mittlere Entfernung zwischen dem umkreisten und dem umkreisenden Himmelskörper eingesetzt. Aus Weg und Zeit läßt sich dann mit Hilfe der Definitionsgleichung der Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ und $s = U$ die Bahngeschwindigkeit errechnen. Die allgemeine Gleichung ist nun

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

spezielle Lösung:

$$v_\text{E} = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}}{31557600 \text{ s}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 29785\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\,\mathrm{km} \cdot 3600\,\mathrm{s}}{1000\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{h}} \\
&= 107226\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{M}} &= \frac{2\pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{2551444\,\mathrm{s}} \\
&= 947\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\,\mathrm{km} \cdot 3600\,\mathrm{s}}{1000\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{h}} \\
&= 3409\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}
\end{aligned}
$$

Die Erde bewegt sich mit 107226 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ um die Sonne. Der Mond umläuft die Erde mit einer Geschwindigkeit von 3409 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

<u>**A2/6 [5]:**</u> Der Wagen $\mathfrak{A}$ mit der Geschwindigkeit v_1 überholt den Wagen $\mathfrak{B}$ mit der Geschwindigkeit v_2. Beide Wagen haben die Länge l. Der Überholvorgang beginnt und endet mit dem Abstand a zwischen beiden Fahrzeugen. Als Abstand ist der Sicherheitsabstand zu wählen, der gleich der Strecke ist, die das überholende Fahrzeug in 1,5 s durchfährt.

a) Stellen Sie den Ausdruck für die Überholzeit $t_{ü}$ und den Überholweg $s_{ü}$ mit $\frac{l}{m}$, $\frac{v_1}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$ und $\frac{v_2}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$ als Variable auf.

b) Berechnen Sie die Überholzeit und Überholweg mit $l = 5{,}0$ m für folgende Beispiele

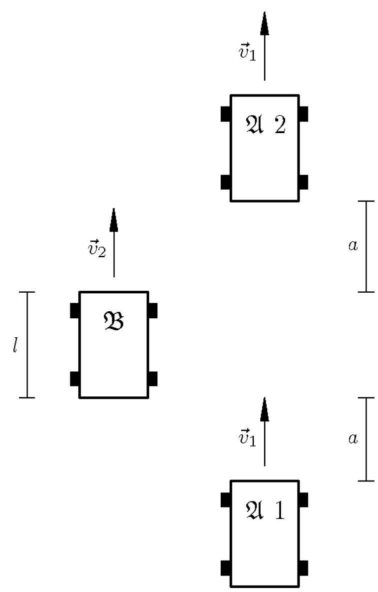
$\frac{v_1\,\mathrm{h}}{\mathrm{km}}$	60	100	130	180
$\frac{v_2\,\mathrm{h}}{\mathrm{km}}$	50	90	110	160

gegeben:

v_1	: Geschwindigkeit des Wagens $\mathfrak{A}$
v_2	: Geschwindigkeit des Wagens $\mathfrak{B}$
l	: Länge beider Wagen
$a = 1{,}5\,\mathrm{s} \cdot v_1$	: Sicherheitsabstand zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

gesucht: $s_{ü}$, $t_{ü}$

Skizze:



allgemeine Lösung:

Bei der Überholbewegung fahren die Wagen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit konstanter Geschwindigkeit in die gleiche Richtung.

1. *Bezugsystem Wagen $\mathfrak{B}$:*

   Wenn man die relative Geschwindigkeit von Wagen $\mathfrak{A}$ gegenüber $\mathfrak{B}$ betrachtet, so läßt sich die Strecke s_d, welche $\mathfrak{A}$ durchfahren muß um $\mathfrak{B}$ zu überholen aus dessen doppelter Länge und dem doppelten Sicherheitsabstand berechnen $s_\mathrm{d} = 2 \cdot a + 2 \cdot l = 2 \cdot (a + l)$. Für a gilt die Beziehung aus der Aufgabenstellung

   $$a = 1{,}5\ \mathrm{s} \cdot v_1 \Longrightarrow s_\mathrm{d} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\ \mathrm{s} \cdot v_1 + l \right) = 3\ \mathrm{s} \cdot v_1 + 2 \cdot l.$$

   Wenn nun $\mathfrak{B}$ in Ruhe gedacht wird, so ergibt sich die relative Geschwindigkeit von $\mathfrak{A}$ gegenüber $\mathfrak{B}$ als Differenz der Beträge der Geschwindigkeitsvektoren $v_\mathrm{rel} = v_1 - v_2$.
   Die Zeit für den Überholvorgang ergibt sich, bei dieser geradlinigen gleichförmigen Bewegung, mit Hilfe von $v = \frac{s}{t} \iff t = \frac{s}{v}$ zu

   $$t_\text{ü} = \frac{s_\mathrm{d}}{v_\mathrm{rel}} \wedge s_\mathrm{d} = 3\ \mathrm{s} \cdot v_1 + 2 \cdot l \wedge v_\mathrm{rel} = v_1 - v_2$$
   $$\iff t_\text{ü} = \frac{3\ \mathrm{s} \cdot v_1 + 2 \cdot l}{v_1 - v_2}.$$

   Für den, während des Überholvorganges, zurückgelegten Weg ergibt sich $s_\text{ü} = v_1 \cdot t_\text{ü} \iff s_\text{ü} = v_1 \cdot \frac{3\ \mathrm{s} \cdot v_1 + 2 \cdot l}{v_1 - v_2}$.

2. Bezugsystem Straße:

Das Zeit-Weg-Gesetz fällt bei dieser Betrachtung wesentlich komplexer aus, als in Ansatz 1. Zu der Strecke zwischen den beiden Position $\mathfrak{A}$ 1 und $\mathfrak{A}$ 2 (siehe Skizze) kommt noch die Strecke hinzu, welche Wagen $\mathfrak{B}$ während des Überholvorganges zurücklegt $s_{ü} = 2 \cdot a + 2 \cdot l = 2 \cdot (a + l) + v_2 \cdot t_{ü}$. Die Zeit, welche benötigt wird, ist aber der zurückgelegte Weg dividiert durch die Geschwindigkeit von $\mathfrak{A}$: $v = \frac{s}{t} \iff t = \frac{s}{v}$. Aufgelöst nach t ergibt sich die Zeit für den Überholvorgang zu

$$
\begin{aligned}
& t_{ü} = \frac{s_{ü}}{v_1} \ \wedge \ s_{ü} = 2 \cdot (a+l) + v_2 \cdot t_{ü} \\
\iff & t_{ü} = \frac{2 \cdot (a+l) + v_2 \cdot t_{ü}}{v_1} = \frac{2 \cdot (a+l)}{v_1} + \frac{v_2 \cdot t_{ü}}{v_1} \\
\iff & t_{ü} - \frac{v_2 \cdot t_{ü}}{v_1} = \frac{2 \cdot (a+l)}{v_1} \\
\iff & t_{ü} \cdot \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = \frac{2 \cdot (a+l)}{v_1} \\
\iff & t_{ü} = \frac{2 \cdot (a+l)}{v_1 \cdot \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)} = \frac{2 \cdot (a+l)}{v_1 - v_2} \ \wedge \ a = 1{,}5\,\mathrm{s} \cdot v_1 \\
\iff & t_{ü} = \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\,\mathrm{s} \cdot v_1 + l\right)}{v_1 - v_2} \\
\iff & t_{ü} = \frac{3\,\mathrm{s} \cdot v_1 + 2 \cdot l}{v_1 - v_2}.
\end{aligned}
$$

Für den, während des Überholvorganges, zurückgelegten Weg ergibt sich $s_{ü} = v_1 \cdot t_{ü} \iff s_{ü} = v_1 \cdot \frac{3\,\mathrm{s} \cdot v_1 + 2 \cdot l}{v_1 - v_2}$.

Viele mathematische Umformung, zugegeben. Trotzdem führen sie zu dem gleichen Ergebnis, bei dem die rechentechnisch aufwendigeren Schritte durch kompliziertere Vorüberlegungen bezüglich der Relativgeschwindigkeit ersetzt werden konnten.

Die Übereinstimmung der resultierenden Gleichungen aus beiden Ansätzen, sind ein Beweis, daß beide Wege möglich sind, vorausgesetzt, daß jeder Lösungsweg für sich richtig ist.

spezielle Lösung:

$$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1000\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{km} \cdot 3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$\frac{v_1\,\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$	$16\,\frac{2}{3}$	$27\,\frac{7}{9}$	$36\,\frac{1}{9}$	50
$\frac{v_2\,\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$	$13\,\frac{8}{9}$	25	$30\,\frac{5}{9}$	$44\,\frac{4}{9}$
$\frac{s_{ü}}{\mathrm{m}}$	360	$933\,\frac{1}{3}$	769	1440
$\frac{t_{ü}}{\mathrm{s}}$	$21\,\frac{3}{5}$	$33\,\frac{3}{5}$	$21\,\frac{3}{10}$	$28\,\frac{4}{5}$

3 Geradlinige konstant beschleunigte Bewegung

<u>A3/1 [5]:</u> Vor einem Schnellzug, der mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ dahin fährt, taucht plötzlich aus dem Nebel in 1 km Entfernung ein, in derselben Richtung mit $v_2 = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahrender, Güterzug auf. Der Schnellzug bremst und kommt mit konstanter Bremsbeschleunigung nach 4 km zum Halten.

a) Wie lange dauert der Bremsvorgang des Zuges?

b) Wie läßt sich mit der Antwort zu a) entscheiden, ob beide Züge zusammenstoßen?

c) Wie könnte man Zeit und Ort eines möglichen Zusammenstoßes mit Hilfe der Bewegungsgleichungen berechnen?

gegeben:

$v_1 = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m} \cdot 1\ \text{h}}{3600\ \text{s} \cdot 1\ \text{km}} = 33{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$	: Schnelligkeit des Schnellzuges
$v_2 = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m} \cdot 1\ \text{h}}{3600\ \text{s} \cdot 1\ \text{km}} = 11{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$	: Schnelligkeit des Güterzuges
$s_\text{b} = 4\ \text{km} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 4000\ \text{m}$	: Bremsweg des Schnellzuges
$s_0 = 1\ \text{km} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 1000\ \text{m}$	: Entfernung zwischen den Zügen

gesucht: t_b, s_z, t_z

allgemeine Lösung:

a) Zur Ermittlung der Bremszeit verwende ich das Zeit-Weg-Gesetzt der beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit $s_\text{b} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_\text{b}^2 + v_1 \cdot t_\text{b}$. Zur Ermittlung der Beschleunigung ziehe ich deren Definitionsgleichung heran $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_\text{e} - v_1}{t_\text{b} - t_0} = \frac{0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - v_1}{t_\text{b} - 0\ \text{s}} = -\frac{v_1}{t_\text{b}}$. Die Endgeschwindigkeit ist $v_\text{e} = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, da nach der Verzögerung der Schnellzug in Ruhe verweilt. $t_0 = 0$ s ist die Anfangszeit. Die Größe a ist hierbei die Momentanbeschleunigung, da laut Aufgabenstellung der Schnellzug *konstant* verzögert. Die Bremszeit ergibt sich durch Einsetzen von der Beschleunigungsgleichung in das Weg-Zeit-Gesetz zu

$$
\begin{aligned}
& s_{\mathrm{b}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_{\mathrm{b}}^2 + v_1 \cdot t_{\mathrm{b}} \ \wedge \ a = -\frac{v_1}{t_{\mathrm{b}}} \\
\Longleftrightarrow\ & s_{\mathrm{b}} = -\frac{v_1}{2 \cdot t_{\mathrm{b}}} \cdot t_{\mathrm{b}}^2 + v_1 \cdot t_{\mathrm{b}} = \frac{v_1 \cdot t_{\mathrm{b}}}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & t_{\mathrm{b}} = \frac{2 \cdot s_{\mathrm{b}}}{v_1}.
\end{aligned}
$$

b) Wenn der Bremsweg des Schnellzuges s_{b} größer als der, von dem Güterzug, in der Bremszeit des Schnellzuges, zurückgelegte Weg ist, so findet ein Zusammenstoß statt, andernfalls nicht

$$v_2 \cdot t_{\mathrm{b}} + s_0 \leq s_{\mathrm{b}}.$$

Währe die Zeit-Weg-Gleichung des verzögernden Schnellzuges anders geartet, so könnte man keine so einfach Bedingung für den Zusammenstoß der Züge angeben.

c) Um den Punkt eines Zusammenstoßes zu berechnen müssen zuvor die Zeit-Weg-Gesetze hergeleitet werden. Die Ortskoordinate des Schnellzuges wird, wie bei a), mit dem Zeit-Weg-Gesetz der konstant Beschleunigten Bewegung ermittelt $s_1(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_1 \cdot t$, wobei die Beschleunigung die von a) ist $a = -\frac{v_1}{t_{\mathrm{b}}}$. Zu beachten ist, daß hier t variabel und nicht wie bei a) gleich t_{b} ist. Das Zeit-Weg-Gesetz des Schnellzuges ist somit

$$
\begin{aligned}
& s_1(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_1 \cdot t \ \wedge \ a = -\frac{v_1}{t_{\mathrm{b}}} \\
\Longleftrightarrow\ & s_1(t) = -\frac{v_1}{2 \cdot t_{\mathrm{b}}} \cdot t^2 + v_1 \cdot t.
\end{aligned}
$$

Da der Güterzug sich nach wie vor konstant weiterbewegt ist seine Bewegungsgleichung

$$s_2(t) = v_2 \cdot t + s_0,$$

wobei s_0 die Entfernung zwischen beiden Zügen nach der ersten Sichtung ist. Das Gleichsetzen der beiden Beziehungen führt zu einer Aussage[1]

$$
\begin{aligned}
& \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_1 \cdot t = v_2 \cdot t + s_0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{a}{2} \cdot t^2 + (v_1 - v_2) \cdot t - s_0 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & t^2 + 2 \cdot \frac{v_1 - v_2}{a} \cdot t - \frac{2 \cdot s_0}{a} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & t^2 + 2 \cdot \frac{v_1 - v_2}{a} \cdot t + \left(\frac{v_1 - v_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_1 - v_2}{a}\right)^2 - \frac{2 \cdot s_0}{a} = 0
\end{aligned}
$$

[1] Die durchzuführenden Rechnungen sind schon kompliziert genug, so daß ich die Gleichung für die Beschleunigung erst zuletzt in die Bewegungsgleichung des Schnellzuges einsetze.

$$\iff \left(t + \frac{v_1 - v_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{(v_1 - v_2)^2}{a^2} + \frac{2 \cdot s_0}{a}\right) = 0$$
$$\iff \left(t + \frac{v_1 - v_2}{a}\right)^2 - \frac{(v_1 - v_2)^2 + 2 \cdot s_0 \cdot a}{a^2} = 0$$
$$\iff \left(t + \tfrac{v_1 - v_2}{a} - \tfrac{\sqrt{(v_1-v_2)^2+2\cdot s_0 \cdot a}}{a}\right) \cdot \left(t + \tfrac{v_1 - v_2}{a} + \tfrac{\sqrt{(v_1-v_2)^2+2\cdot s_0 \cdot a}}{a}\right) = 0$$
$$\iff t = \tfrac{v_2 - v_1 + \sqrt{(v_1-v_2)^2+2\cdot s_0\cdot a}}{a} \ \vee \ t = \tfrac{v_2 - v_1 - \sqrt{(v_1-v_2)^2+2\cdot s_0\cdot a}}{a},$$

die den Zeitpunkt eines Zusammenstoßes angibt, sofern er denn statt findet. Die negative Lösung der quadratischen Gleichung ist irrelevant, so daß der Zeitpunkt des Zusammenstoßes

$$t_\mathrm{z} = -t_\mathrm{b} \cdot \frac{v_2 - v_1 + \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2 \cdot s_0 \cdot \frac{v_1}{t_\mathrm{b}}}}{v_1}$$

ist. Der Ort des Zusammenstoßes läßt sich einfach über die Gleichung für die Ortskoordinate des Güterzuges bestimmen, in die die Zeit bis zum Zusammenstoß eingesetzt wird

$$s_2(t_\mathrm{z}) = v_2 \cdot t_\mathrm{b} \cdot \frac{v_1 - v_2 - \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2 \cdot s_0 \cdot \frac{v_1}{t_\mathrm{b}}}}{v_1} + s_0.$$

spezielle Lösung:

a) $$t_\mathrm{b} = \frac{2 \cdot 4000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{33{,}3\ \mathrm{m}} = 240\ \mathrm{s} \cdot \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} = 4\ \mathrm{min}$$

b) $$11{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 240\ \mathrm{s} + 1000\ \mathrm{m} \le 4000\ \mathrm{m} \iff 3664\ \mathrm{m} \le 4000\ \mathrm{m}\ _{(w)}$$

c) $$s_\mathrm{z} = 11{,}1\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 240\,\mathrm{s} \cdot \frac{(33{,}3 - 11{,}1)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \sqrt{(33{,}3-11{,}1)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - \frac{2\cdot 10^3\ \mathrm{m}\cdot 33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{240\ \mathrm{s}}}}{33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + 10^3\,\mathrm{m} = 1600\ \mathrm{m}$$

$$t_\mathrm{z} = -240\ \mathrm{s} \cdot \frac{11{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \sqrt{(33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 11{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 2\cdot 1000\,\mathrm{m}\cdot \frac{33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{240\ \mathrm{s}}}}{33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 54\ \mathrm{s}$$

Der Schnellzug käme nach 4 min zum Stehen. Da die Ungleichung wahr ist kommt es zu einem Zusammenprall. Der Ort des Unfalles ist 1,6 km von dem Ort, wo der Güterzug durch den Schnellzugführer erstmals gesichtet wurde, entfernt. Das Unglück ereignet sich 54 s nach dem ersten visuellen Kontakt.

<u>A3/2 [11]:</u> Wie groß muß der Bremsweg eines mit einer Geschwindigkeit $v = 120\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf der Autobahn fahrenden Personenkraftwagens sein, damit bei einer mittleren Bremsverzögerung von $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ das Fahrzeug maximal mit einer Endgeschwindigkeit von $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf ein Hindernis auffährt?

gegeben:

$v_0 = 120\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s} \cdot 1\ \mathrm{km}} = 33{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	: Anfangsgeschwindigkeit
$v_\mathrm{e} = 20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s} \cdot 1\ \mathrm{km}} = 5{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	: Aufprallgeschwindigkeit
$a_\mathrm{B} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	: Verzögerung des Autos

gesucht: s_B

allgemeine Lösung:

Da es sich um eine geradlinige konstant verzögerte Bewegung handelt ist der zurückgelegte Bremsweg die Strecke, welche das Auto bei konstanter Geschwindigkeit zurückgelegt hätte, vermindert um den Weg, der durch den Bremsvorgang zurückgenommen wurde $s_\mathrm{B} = v_0 \cdot t_\mathrm{B} - \frac{1}{2} \cdot a_\mathrm{B} \cdot t_\mathrm{B}^2$. Die Geschwindigkeit des Wagens beträgt nach der Zeit t_B: $v = v_0 - a_\mathrm{B} \cdot t_\mathrm{B}$. Setzt man für v die zu erreichende Endgeschwindigkeit, so ergibt sich die Bremszeit aus dieser Gleichung für die Geschwindigkeit des Wagens zu $v_\mathrm{e} = v_0 - a_\mathrm{B} \cdot t_\mathrm{B} \iff a_\mathrm{B} \cdot t_\mathrm{B} = v_0 - v_\mathrm{e} \iff t_\mathrm{B} = \frac{v_0 - v_\mathrm{e}}{a_\mathrm{B}}$. Einsetzen dieser Beziehung in die Gleichung für den Bremsweg ergibt

$$\begin{aligned}
& s_\mathrm{B} = v_0 \cdot t_\mathrm{B} - \frac{1}{2} \cdot a_\mathrm{B} \cdot t_\mathrm{B}^2 \ \wedge\ t_\mathrm{B} = \frac{v_0 - v_\mathrm{e}}{a_\mathrm{B}} \\
\iff\ & s_\mathrm{B} = v_0 \cdot \frac{v_0 - v_\mathrm{e}}{a_\mathrm{B}} - \frac{1}{2} \cdot a_\mathrm{B} \cdot \left(\frac{v_0 - v_\mathrm{e}}{a_\mathrm{B}}\right)^2 \\
& \quad = v_0 \cdot \frac{v_0 - v_\mathrm{e}}{a_\mathrm{B}} - \frac{(v_0 - v_\mathrm{e})^2}{2 \cdot a_\mathrm{B}} \\
& \quad = \frac{v_0^2 - v_0 \cdot v_\mathrm{e}}{a_\mathrm{B}} - \frac{v_0^2 - 2 \cdot v_0 \cdot v_\mathrm{e} + v_\mathrm{e}^2}{2 \cdot a_\mathrm{B}} \\
& \quad = \frac{2 \cdot v_0^2 - 2 \cdot v_0 \cdot v_\mathrm{e} - v_0^2 + 2 \cdot v_0 \cdot v_\mathrm{e} - v_\mathrm{e}^2}{2 \cdot a_\mathrm{B}} \\
& \quad = \frac{v_0^2 - v_\mathrm{e}^2}{2 \cdot a_\mathrm{B}}.
\end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$s_\mathrm{B} = \frac{33{,}3^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - 5{,}56^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$
$$= 108\ \mathrm{m}$$

Der Wagen prallt nach 108 m mit einer Endgeschwindigkeit von 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf ein Hindernis.

<u>**A3/3 [12]:**</u> Ein Personenkraftwagen setzt sich zur Zeit $t_0 = 0$ s beschleunigt in Bewegung. Zur Zeit $t_1 = 10{,}5$ s hat der Personenkraftwagen die Geschwindigkeit $v_1 = 100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht. Anschließend wird von der Zeit t_1 bis zur Zeit $t_2 = 14{,}0$ s eine Vollbremsung durchgeführt, die den Personenkraftwagen wieder zum Stillstand bringt. Während der Beschleunigungsphase wurde der Personenkraftwagen mit der mittleren Kraft $\bar{F}_1$ beschleunigt; während des Bremsvorganges wurde er mit der mittleren Kraft $\bar{F}_2$ verzögert.

a) Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1}$ aus verzögernder und beschleunigender Kraft.

b) Berechnen Sie die Beschleunigungsstrecke s_1 und die Bremsstrecke s_2.

gegeben:

$v_1 = 100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s} \cdot 1\ \mathrm{km}} = 27,8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	: Endgeschwindigkeit
$t_1 = 10{,}5$ s	: Beschleunigungsdauer
$t_2 = 14{,}0$ s	: Wagen steht wieder still

gesucht: $\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_2}$, s_1, s_2

allgemeine Lösung:

a) Das Verhältnis der beiden Kräfte ist $\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = \frac{m \cdot \bar{a}_2}{m \cdot \bar{a}_1} = \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}$, bei Anwendung des ersten Newtonschen Axioms. Die Masse ist hierbei die ganze Zeit (annähernd) konstant und fällt bei der Verhältnisbildung heraus. Übrig bleibt ein Term, der das Verhältnis der beiden Beschleunigungen angibt. Beide Beschleunigungen lassen sich mittels der Definitionsgleichung der Beschleunigung $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ermitteln, da die Geschwindigkeitsangaben im Aufgabentext als *Momentan*geschwindigkeiten aufzufassen sind. Für die Beschleunigung gilt dann $\bar{a}_1 = \frac{v_1 - 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{t_1 - 0\ \mathrm{s}} = \frac{v_1}{t_1}$. Die Verzögerung beträgt $\bar{a}_2 = \frac{0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - v_1}{t_2 - t_1} = -\frac{v_1}{t_2 - t_1}$. Da $\bar{a}_2 < 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, es wird ja verzögert, ist hier der Betrag der Beschleunigung zu setzen. Das Verhältnis der Beschleunigungen und somit das der Kräfte ist

$$\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = \frac{|\bar{a}_2|}{\bar{a}_1} \Longrightarrow \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = \frac{\left|-\frac{v_1}{t_2-t_1}\right|}{\frac{v_1}{t_1}} = \frac{t_1}{t_2-t_1}.$$

b) Für die Beschleunigung des Wagens gilt $s_1 = \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_1 \cdot t_1^2$, da die Anfangsgeschwindigkeit Null ist. Für die Beschleunigung $\bar{a}_1$ gilt die unter a) hergeleitete Beziehung, $s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1}{t_1} \cdot t_1^2 = \frac{v_1 \cdot t_1}{2}$. Die zweite Beschleunigungsstrecke ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für eine beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit, wobei für die Zeit $t_2 - t_1$ einzusetzen ist

$$\begin{aligned} & s_2 = \frac{1}{2} \cdot \bar{a}_2 \cdot (t_2 - t_1)^2 + v_1 \cdot (t_2 - t_1) \ \wedge \ \bar{a}_2 = -\frac{v_1}{t_2 - t_1} \\ \Longleftrightarrow \ & s_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_1}{t_2 - t_1} \cdot (t_2 - t_1)^2 + v_1 \cdot (t_2 - t_1) \\ & \quad = \frac{1}{2} \cdot v_1 \cdot (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

a) $$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} &= \frac{10{,}5\ \text{s}}{14{,}0\ \text{s} - 10{,}5\ \text{s}} \\ &= 3:1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} s_1 &= \frac{27{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10{,}5\ \text{s}}{2} \\ &= 146\ \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{2} \cdot 27{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (14{,}0\ \text{s} - 10{,}5\ \text{s}) \\ &= 48{,}7\ \text{m} \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Verzögerungs- zur Beschleunigungskraft beträgt 3 : 1. Die Beschleunigungsstrecke ist 146 m lang. Die Bremsstrecke beträgt 48,7 m.

__A3/4 [12]:__ Zwei Personenkraftwagen fahren auf derselben geraden Fahrbahn. Der erste Wagen fährt mit einer Geschwindigkeit v_1, der zweite Wagen fährt hinter dem ersten mit der Geschwindigkeit v_2 her. Der Abstand d der beiden Autos ist die Strecke vom Bug des zweiten Personenkraftwagens bis zum Heck des ersten. Ein Abstandswarngerät soll den Fahrer des zweiten Wagens durch ein akustische oder optische Anzeige warnen, wenn er gefährlich nahe an den ersten Wagen heranfährt. Das Abstandswarngerät sendet vom Bug des zweiten Autos in periodischer Zeitfolge Radarimpulse aus. Zwischen 1000 aufeinanderfolgenden Radarimpulsen liegt die Zeitspanne Δt_{R}. Die Dauer eines Radarimpulses ist gegenüber der Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radarimpulsen vernachlässigbar gering. Im folgenden werden die beiden Radarimpulse betrachtet, die am Anfang und am Ende der Zeitspanne Δt_{R} abgegeben werden; sie werden als erster und zweiter Radarimpuls bezeichnet. Mit Hilfe dieser Radarimpulse berechnet der Computer des Abstandswarngerätes die Geschwindigkeit v_1 des ersten Automobils. Außerdem stellt der Computer fest, ob der Abstand d der beiden Wagen den kritischen Abstand d_{krit} erreicht oder bereits unterschritten hat.

a) Der erste Radarimpuls läuft mit Lichtgeschwindigkeit c zum ersten Automobil und wird an dessen Heck reflektiert. Der reflektierte Radarimpuls läuft wieder mit der Lichtgeschwindigkeit c zurück bis zum Bug des zweiten Wagens. Dort wird der Radarimpuls empfangen und die gesamte Laufzeit $t_{\mathrm{L},1}$ gemessen. Der Computer berechnet den Abstand d_1. Stellen Sie einen Term für d_1 in Abhängigkeit von c und $t_{\mathrm{L},1}$ auf.
Anleitung: Die Fahrzeuggeschwindigkeit v_1 und v_2 können gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigt werden.

b) Der zweite Radarimpuls benötigt die Laufzeit $t_{\mathrm{L},2}$. Der Computer berechnet den Abstand d_2. Stellen Sie einen Term für d_2 in Abhängigkeit von c und $t_{\mathrm{L},2}$ auf.

c) Bei bekannter Geschwindigkeit v_2 berechnet der Computer die Geschwindigkeit v_1. Stellen Sie einen Term für v_1 in Abhängigkeit von v_1, $t_{\mathrm{L},1}$, $t_{\mathrm{L},2}$ und Δt_{R} auf.
Anleitung: Betrachten Sie die Relativgeschwindigkeit v_{rel}, welche die beiden Personenkraftwagen zueinander haben.

d) Dem kritischen Abstand d_{krit} soll folgende Situation zugrunde liegen. Der Fahrer des ersten Personenkraftwagens macht eine Vollbremsung. Der Fahrer des zweiten Autos reagiert gleichfalls mit einer Vollbremsung, jedoch um die Reaktionszeit t_{S} („Schrecksekunde“) verspätet. Im Computer ist für alle Wagen die durchschnittliche Bremsverzögerung a gespeichert, und zwar für den Fahrer vorwählbar nach Straßenzustand: $a_{\mathrm{T}} = -8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für trockene Fahrbahn, $a_N = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für nasse Fahrbahn, $-2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für schneeglatte Fahrbahn. Die Bremsstrecke des ersten Automobils beträgt $s_{\mathrm{B},1}$, die Bremsstrecke des zweiten Automobils beträgt $s_{\mathrm{B},2}$. Beim Stillstand beider Wagen soll noch der minimale Abstand $d_{\min}$ vorhanden sein.

Schrecksekunde

d$_1$) Stellen Sie einen Term für $s_{\mathrm{B},1}$ in Abhängigkeit von v_1 und a auf, und stellen Sie einen Term für $s_{\mathrm{B},2}$ in Abhängigkeit von v_2 und a auf.

d$_2$) Der Computer berechnet den kritischen Abstand d_{krit}. Stellen Sie einen Term für d_{krit} in Abhängigkeit von v_1, v_2, a, t_S, $d_{\min}$ auf.

e) Bei einem von der Industrie entwickelten Gerät ist $\Delta t_{\mathrm{R}} = 4{,}0000 \cdot 10^{-3}$ s. Gespeichert sind die Größenwerte $t_{\mathrm{S}} = 1$ s und $d_{\min} = 2$ m. Ein Personenkraftwagen hat die Geschwindigkeit $v_2 = 144{,}0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der Fahrer wählt $a = a_{\mathrm{T}}$. Vor diesem Wagen fährt ein Auto mit der Geschwindigkeit v_1. Das Abstandswarngerät mißt: $t_{\mathrm{L},1} = 6{,}6667 \cdot 10^{-7}$ s; $t_{\mathrm{L},2} = 6{,}6640 \cdot 10^{-7}$ s. Berechnen Sie d_1, d_2, v_1, d_{krit}. Prüfen Sie ob das Abstandswarngerät ein Warnsignal abgibt.

gegeben:

$\Delta t_{\mathrm{R}} = 4{,}0000 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}$	: Zeit zwischen 1000 Radarimpulsen
$t_{\mathrm{S}} = 1\ \mathrm{s}$	: „Zeitdauer" der Schrecksekunde
$d_{\min} = 2\ \mathrm{m}$	: minimaler Abstand nach Vollbremsung
$a_{\mathrm{T}} = -8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	: Verzögerung bei trockener Fahrbahn
$t_{\mathrm{L},1} = 6{,}6667 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$	: Laufzeit des ersten Radarimpulses
$t_{\mathrm{L},2} = 6{,}6640 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}$	: Laufzeit des tausendsten Radarimpulses

gesucht: d_1, d_2, v_1, d_{krit}

allgemeine Lösung:

a) Da c konstant und die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge vernachlässigbar klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, gilt für den Weg, den der Radarimpuls zurücklegt $s = c \cdot t_{\mathrm{L},1}$. Da der Impuls aber zwischen den Autos hin und zurück muß ist der Abstand zwischen beiden Wagen $d_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t_{\mathrm{L},1}$.

b) Wie a): $d_2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t_{\mathrm{L},2}$.

c) Die Relativgeschwindigkeit $v_{\mathrm{rel}} = v_1 - v_2$ zwischen den beiden Automobilen ergibt sich aus der Abstandsveränderung, die während dem erstem und dem zweiten Radarimpuls stattgefunden haben kann, und der Zeit zwischen den Radarimpulsen $v_{\mathrm{rel}} = \frac{d_2 - d_1}{\Delta t_{\mathrm{R}}}$. Sie ist positiv, wenn der erste Wagen schneller als zweite fährt, sonst negativ oder Null, wenn beide gleich schnell sind. Die Geschwindigkeit vom Bezugsystem Straße aus ist nun die Relativgeschwindigkeit zwischen den Wagen plus die Schnelligkeit von Wagen zwei, also $v_1 = v_2 + v_{\mathrm{rel}}$. Einsetzen der Ergebnisse aus a) und b) ergibt dann

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 + \frac{d_2 - d_1}{\Delta t_{\mathrm{R}}} \ \wedge \ d_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t_{\mathrm{L},1} \ \wedge \ d_2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t_{\mathrm{L},2} \\ &= v_2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot t_{\mathrm{L},2} - \frac{1}{2} \cdot c \cdot t_{\mathrm{L},1}}{\Delta t_{\mathrm{R}}} \\ &= v_2 + c \cdot \frac{t_{\mathrm{L},2} - t_{\mathrm{L},1}}{2 \cdot \Delta t_{\mathrm{R}}}. \end{aligned}$$

d_1) Da für beide Wagen die Schlußgleichung identisch ist schreibe ich $s_{\mathrm{B},i}$ und v_i mit $i \in \{1;2\}$. Die Automobile verzögern konstant, legen also die Strecke $s_{\mathrm{B}} = v_i \cdot t_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_{\mathrm{B}}^2$ zurück.[2] Ein Minuszeichen ist hier nicht möglich, da $a < 0$. Die Bremszeit, bis zum Stillstand mit $v = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ergibt sich aus, der Gleichung

[2] Da sich die geradlinige gleichförmige und die konstant verzögerte Bewegung überlagern, ist hier diese Form des Zeit-Weg-Gesetzes zu verwenden.

für die Geschwindigkeit bei der gleichförmig konstant beschleunigten Bewegung, $v = a \cdot t_\mathrm{B} + v_1$ mit $v = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu $a \cdot t_\mathrm{B} + v_i = 0 \iff t_\mathrm{B} = -\frac{v_i}{a}$. Einsetzen dieser Beziehung in die Gleichung für den Bremsweg ergibt

$$
\begin{aligned}
s_{\mathrm{B},i} &= v_i \cdot \left(-\frac{v_i}{a}\right) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{v_i}{a}\right)^2 \\
&= -\frac{v_i^2}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v_i^2}{a^2} = -\frac{v_i^2}{a} + \frac{v_i^2}{2 \cdot a} \\
&= -\frac{v_i^2}{2 \cdot a}.
\end{aligned}
$$

d$_2$) Automobil zwei erreicht den kritischen Abstand und Wagen eins macht eine Vollbremsung. Der Bremsweg von Auto eins ist $s_{\mathrm{B},1}$. Während der Schrecksekunde fährt der Wagen zwei mit konstanter Geschwindigkeit weiter und legt den Weg $s = v_2 \cdot t_\mathrm{S}$ zurück. Also ist der gesamte Bremsweg von Wagen zwei $s_{\mathrm{B,ges}} = s_{\mathrm{B},2} + v_2 \cdot t_\mathrm{S}$. Der minimale Abstand zwischen den beiden Wagen ist die Differenz aus den beiden Bremswegen plus den Abstand der Autos vor der Vollbremsung, also Schrecksekunde

$$
\begin{aligned}
& d_\mathrm{min} = s_{\mathrm{B},1} - s_{\mathrm{B},2} - v_2 \cdot t_\mathrm{S} + d_\mathrm{krit} \\
\iff & d_\mathrm{krit} = -s_{\mathrm{B},1} + s_{\mathrm{B},2} + v_2 \cdot t_\mathrm{S} + d_\mathrm{min} \ \wedge \ s_\mathrm{B,i} = -\frac{v_i^2}{2 \cdot a} \\
\iff & d_\mathrm{krit} = \frac{v_1^2}{2 \cdot a} - \frac{v_2^2}{2 \cdot a} + v_2 \cdot t_\mathrm{S} + d_\mathrm{min} \\
\iff & d_\mathrm{krit} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot a} + v_2 \cdot t_\mathrm{S} + d_\mathrm{min}.
\end{aligned}
$$

e) Einsetzen der Größen in die Endgleichungen von a)–d) liefern die gewünschten Ergebnisse.

spezielle Lösung:

e)

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6{,}6667 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s} \\
&= 100,00\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6{,}6640 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s} \\
&= 99,96\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{6{,}6640 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s} - 6{,}6667 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}}{2 \cdot 4{,}0000 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}} \\
&= 29{,}875\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km} \cdot 3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h} \cdot 1000\ \mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

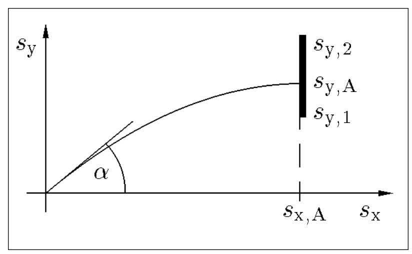
$$= 107{,}55\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{krit}} &= \frac{29{,}875^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - 40^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{-2 \cdot 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s} + 2\ \mathrm{m} \\ &= 86\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Wagen fahren in ca. 100 m Entfernung. Der erste Wagen fährt mit 107,55 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der kritische Abstand bei diesen Verhältnissen und trockener Straße beträgt 86 m. Da $d_2 > d_{\mathrm{krit}}$ wird kein Warnsignal abgegeben.

4 Wurfbewegung

A4/1 [12]: In der Mitte des 14. Jahrhunderts wurden die mechanischen Katapulte durch Pulvergeschütze verdrängt. Solche Geschütze wurden insbesondere zur Verteidigung und zur Zerstörung von Burgen und Befestigungsanlagen eingesetzt. Die Abbildung zeigt schematisch die Mauer einer mittelalterlichen Befestigungsanlage. Der Fußpunkt der Mauer hat die Koordinaten $s_{\mathrm{x,A}} = 80$ m; $s_{\mathrm{y,1}} = 21$ m. Die Mauerkrone hat die Koordinaten $s_{\mathrm{x,A}} = 80$ m; $s_{\mathrm{y,2}} = 34$ m. Im folgenden werden die Kugeln als *Massenpunkte* behandelt. Massenpunkte Die Kugeln verlassen das Geschütz im Ursprung des Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Abschußwinkel α gegen die Horizontale. Die abgeschossene Kugel bewegt sich auf einer Wurfparabel. Die Luftreibung ist in dieser Aufgabe zu vernachlässigen.



a) Die Wurfparabel hat die Gleichung

$$s_{\mathrm{y}} = \tan\alpha \cdot s_{\mathrm{x}} - \frac{g \cdot m}{4 \cdot E_{\mathrm{kin}} \cdot \cos^2\alpha} \cdot s_{\mathrm{x}}^2.$$

Dabei bedeutet g die Fallbeschleunigung und E_{kin} die kinetische Energie der Kugel mit der Abschußgeschwindigkeit v_0. Leiten Sie diese Gleichung her. Verwenden Sie dabei die trigonometrische Beziehung $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

b) Das Geschütz wird so eingerichtet, daß der Abschußwinkel $\alpha = 35°$ beträgt. Die Kugeln haben die Masse $m = 63{,}5$ kg; sie verlassen das Geschütz mit der kinetischen Energie $E_{\mathrm{kin}} = 5{,}3 \cdot 10^4$ J. Berechnen Sie die Höhe $s_{\mathrm{y,A}}$ des Aufschlagpunktes.

c) Die Kugeln konnten sehr genau hergestellt werden, sie wurden jedoch mit unterschiedlichen Pulvermischungen und Pulvermengen abgeschossen. Außerdem unterlagen die Geschützrohre einem Verschleiß. Dadurch ergaben sich Streuungen, die in dieser Aufgabe mit folgenden Ungleichungen angesetzt werden

$$5{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{J} \le E_{\mathrm{kin}} \le 5{,}6 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$$
$$32° \le \alpha \le 38°.$$

Untersuchen Sie ob alle abgeschossenen Kugeln zu Treffern führten.

d) Für senkrechtes Auftreffen[3] einer Kugel auf die Mauer muß die Bedingung

$$E_{\text{kin}} \cdot \sin 2\alpha = m \cdot g \cdot s_{\text{x,A}}$$

erfüllt sein. Leiten Sie diese Beziehung mit Hilfe der Differentialrechnung her. Verwenden Sie dabei die trigonometrischen Beziehungen

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{und} \qquad 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

e) *Zeigen Sie:* Die in Teilaufgabe b) betrachtete Kugel trifft senkrecht auf die Mauer. Berechnen Sie die Geschwindigkeit V_{A}, welche diese Kugel beim Auftreffen auf die Mauer hat. Geben Sie diese Geschwindigkeit in den Einheiten $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

f) Untersuchen Sie, ob ein senkrechtes Auftreffen einer Kugel auf die Mauer unter den Abschußwinkeln $\alpha_{\text{min}} = 32°$ und $\alpha_{\text{max}} = 38°$ möglich ist.

gegeben:

$s_{\text{x,A}} = 80$ m	: x-Koordinate des Fußpunktes der Mauer
$s_{\text{y,1}} = 21$ m	: y-Koordinate des Fußpunktes der Mauer
$s_{\text{y,2}} = 34$ m	: y-Koordinate der Mauerkrone
$m = 63{,}5$ kg	: Masse der Kanonenkugel
α, E_{kin} Bereiche	: Daten von Beispiel Schüssen

gesucht: $s_{\text{y}}(s_{\text{x}})$, $s_{\text{y,A}}$, senkrechte Einschläge

allgemeine Lösung:

a) Für die Bewegung der Kugel gelten dir Gesetze des schiefen Wurfs. Der Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes zur Zeit t wird in Komponenten zerlegt $\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{x}} + \vec{v}_{\text{y}}$ deren Beträge $v_{\text{x}} = v_0 \cdot \cos\alpha$ und $v_{\text{y}} = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$ sind. Da sich horizontale und vertikale Bewegung superpositionieren lassen, betrachte ich beide einzeln. Die horizontale Bewegung ist geradlinig gleichförmig, deshalb ist zur Zeit t der zurückgelegte Weg des Massenpunktes $s_{\text{x}} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$. Die vertikale Bewegung ist konstant beschleunigt, deshalb ist zur Zeit t der zurückgelegte Weg des Massenpunktes $s_{\text{y}} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Die Endform der Gleichung soll die Abhängigkeit von s_{x} zu s_{y} verdeutlichen[4], deshalb ist die Gleichung für s_{x} nach t aufzulösen $s_{\text{x}} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \iff t = \frac{s_{\text{x}}}{v_0 \cdot \cos\alpha}$. Einsetzen in die Gleichung von s_{y} ergibt

$$s_{\text{y}} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{s_{\text{x}}}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{s_{\text{x}}}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2$$
$$\iff s_{\text{y}} = \tan\alpha \cdot s_{\text{x}} - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot s_{\text{x}}^2.$$

[3] Es ist nicht das Auftreffen der Kugel auf die Mauerkrone gemeint, sondern ein seitlicher Einschlag.

[4] Eine Parabel 2. Grades hat in der Mathematik die allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$.

Da $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \iff v_0^2 = \frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m}$ folgt für die Gleichung der Wurfparabel des Geschosses

$$s_{\text{y}} = \tan\alpha \cdot s_{\text{x}} - \frac{g \cdot m}{4 \cdot E_{\text{kin}} \cdot \cos^2\alpha} \cdot s_{\text{x}}^2.$$

b) Ich verwende die unter a) hergeleitete Wurfparabelgleichung, in die ich als s_{x} die x-Koordinate des Fußpunktes der Mauer $s_{\text{x,A}}$ einsetze. Einsetzen und Ausrechnen ergibt den Aufschlagspunkt $s_{\text{y}} = s_{\text{y,A}}$.

c) Ich berechne den Aufschlagspunkt für die Grenzen des Winkels- und der Energieintervalls. Für die erste Berechnung verwende ich jeweils die linke der beiden Intervallgrenzen. Für die zweite, die rechte Grenze. Der Aufschlagspunkt muß zwischen 21 m $\leq s_{\text{y,A}} \leq$ 34 m liegen, um ein Treffer zu sein.

d) Ein senkrechtes Auftreffen auf die Mauer bedeutet, daß die Kugel in der Nähe der Mauer waagerecht fliegt, also parallel zum Boden. Die Steigung der Wurfparabel $s_{\text{y}} = s_{\text{y}}(s_{\text{x}})$ ist also in diesem Punkt $\frac{ds_{\text{y}}}{ds_{\text{x}}} = 0$. Differenzieren der Parabelfunktion ergibt

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{\text{y}}(s_{\text{x}}) = \frac{\mathrm{d}s_{\text{y}}}{\mathrm{d}s_{\text{x}}} &= \tan\alpha - \frac{g \cdot m}{4 \cdot E_{\text{kin}} \cdot \cos^2\alpha} \cdot 2 \cdot s_{\text{x}} \\
&= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g \cdot m}{2 \cdot E_{\text{kin}} \cdot \cos^2\alpha} \cdot s_{\text{x}} = 0 \\
\iff \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{g \cdot m}{2 \cdot E_{\text{kin}} \cdot \cos^2\alpha} \cdot s_{\text{x}} \\
\iff 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot E_{\text{kin}} &= g \cdot m \cdot s_{\text{x}} \\
\iff E_{\text{kin}} \cdot \sin 2\alpha &= m \cdot g \cdot s_{\text{x}}.
\end{aligned}$$

Die Kugel trifft senkrecht auf die Mauer, wenn die Bedingung für $s_{\text{x}} = s_{\text{x,A}}$ wahr wird.

e) Einsetzen der Daten aus b) in das Kriterium für den senkrechten Einschlag aus d) ergibt das Ergebnis. Die Geschwindigkeit im Aufschlagspunkt ist die horizontale Geschwindigkeit, die vertikale ist, wegen dem senkrechten Einschlag, Null $V_{\text{A}} = v_{\text{x}} = v_0 \cdot \cos\alpha$ in $s_{\text{x,A}}$. Die Anfangsgeschwindigkeit ergibt sich aus der kinetischen Energie der Kugel zu $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \iff v_0^2 = \frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m} \iff v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m}}$. Also ist die Aufschlagsgeschwindigkeit

$$V_{\text{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m}} \cdot \cos\alpha.$$

f) Ich verwende die Beziehung für das senkrechte Einschlagen der Kugel in die Mauer von d), die ich nach E_{kin} auflöse

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} \cdot \sin 2\alpha &= m \cdot g \cdot s_{\text{x,A}} \\
\iff E_{\text{kin}} &= \frac{m \cdot g \cdot s_{\text{x,A}}}{\sin 2\alpha},
\end{aligned}$$

um die hierzu benötigte kinetische Energie bei den gegebenen Winkeln zu ermitteln. Die kinetische Energie muß in dem, bei Teilaufgabe c) spezifizierten Bereich für das Geschütz, liegen, damit der gewünschte, senkrechte Einschlag erfolgt.

spezielle Lösung:

$$\text{b)}\ s_{\mathrm{y,A}} = \tan 35° \cdot 80\ \mathrm{m} - \frac{g \cdot 63{,}5\ \mathrm{kg}}{4 \cdot 5{,}3 \cdot 10^4\ \mathrm{J} \cdot \cos^2 35°} \cdot (80\ \mathrm{m})^2$$
$$= 28\ \mathrm{m}$$

$$\text{c)}\ s_{\mathrm{y,A,1}} = \tan 32° \cdot 80\ \mathrm{m} - \frac{g \cdot 63{,}5\ \mathrm{kg}}{4 \cdot 5{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{J} \cdot \cos^2 32°} \cdot (80\ \mathrm{m})^2$$
$$= 22\ \mathrm{m}$$

$$s_{\mathrm{y,A,2}} = \tan 38° \cdot 80\ \mathrm{m} - \frac{g \cdot 63{,}5\ \mathrm{kg}}{4 \cdot 5{,}6 \cdot 10^4\ \mathrm{J} \cdot \cos^2 38°} \cdot (80\ \mathrm{m})^2$$
$$= 34\ \mathrm{m}$$

$$\text{e}_1)\quad 5{,}3 \cdot 10^4\ \mathrm{J} \cdot \sin(2 \cdot 35°) = 63{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 80\ \mathrm{m}$$
$$\Longleftrightarrow 4980 = 4980\ _{(w)}$$

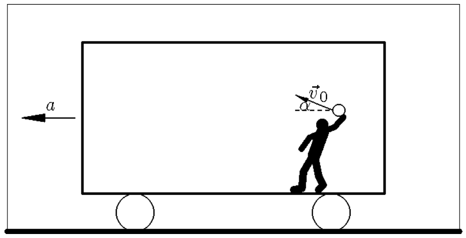
$$\text{e}_2)\ V_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}3 \cdot 10^4\ \mathrm{J}}{63{,}5\ \mathrm{kg}}} \cdot \cos 35°$$
$$= 33{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \cdot \frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}}$$
$$= 121\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\text{f)}\ E_{\mathrm{kin}}^{32°} = \frac{63{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 80\ \mathrm{m}}{\sin(2 \cdot 32°)}$$
$$= 5{,}54 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{kin}}^{38°} = \frac{63{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 80\ \mathrm{m}}{\sin(2 \cdot 38°)}$$
$$= 5{,}14 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

Die Kugel von b) schlägt 7 m über dem Fußpunkt der Festungsmauer senkrecht, mit einer Geschwindigkeit von 121 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, ein. Trotz Streuung treffen alle Kugeln von c) die Mauer. Bei beiden Winkeln ist ein senkrechtes auftreffen möglich.

A4/2 [4]: Ein Zug fährt mit konstanter Beschleunigung a auf geradlinigen, horizontalen Schienen. In dem sehr langen und hohen Zugabteil wirft jemand einen Ball mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zur Horizontalen in Fahrtrichtung. Unter welcher Bedingung kehrt der Ball wieder zur Hand zurück, wenn man diese nicht wegbewegt? Die Luftreibung ist zu vernachlässigen.



gegeben:

v_0	: Anfangsgeschwindigkeit des Balles
α	: Abwurfwinkel zur Horizontalen
a	: geradlinige konstante Beschleunigung des Zuges

gesucht: Bedingung für die Rückkehr des Balles zur Hand

allgemeine Lösung:

Sobald der Ball die Hand des Werfers verläßt, beträgt die Geschwindigkeit des Balles bezüglich dem Werfer v_0 (Der Werfer verbleibt, relativ zu dem Eisenbahnwagen, in Ruhe). Der Eisenbahnwagen wird konstant beschleunigt. Die Strecke, welche der Körper zurücklegt, bis er wieder die Abwurfhöhe erreicht hat, muß durch den Zug beziehungsweise den Werfer auch zurücklegt werden. Die Zeit, welche der Ball braucht, um die Wurfparabel $s_\mathrm{y} = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ zu durchfliegen, daß heißt bis s_y wieder 0 beträgt, ist

$$\begin{aligned} & v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha \qquad . \\ \Longleftrightarrow\ & t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

Nun kann der Betrag der Beschleunigung a berechnet werden, indem man $s_\mathrm{x} = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ mit $s_\mathrm{x} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ gleichsetzt

$$\begin{aligned} & v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \ \wedge\ t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \\ \Longleftrightarrow\ & v_0 \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \\ \Longleftrightarrow\ & \cos\alpha = a \cdot \frac{\sin\alpha}{g} \\ \Longleftrightarrow\ & a = g \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \Longleftrightarrow\ & a = g \cdot \cot\alpha \end{aligned}$$

Aus Beschleunigung a des Zuges ergibt sich der Winkel α zur Horizontalen zu

$$a = g \cdot \cot\alpha \iff \cot\alpha = \frac{a}{g} \iff \alpha = \operatorname{arccot}\frac{a}{g}.$$

Die Beschleunigung a ist nicht von v_0 abhängig, die Anfangsgeschwindigkeit bestimmt also nur die maximale Entfernung von der Hand, die „Weite“ des Wurfes und somit die Zeit, die der Ball benötigt um zur Hand zurückzukommen.

5 Drehbewegung

A5/1 [3]: Ein Motor rotiert mit 2800 Umdrehungen je Minute. Berechnen Sie die Frequenz in Hz.

gegeben:

$$\begin{aligned} n &= 2800 && : \text{Anzahl Umdrehungen} \\ t &= 1\ \text{min} \cdot \tfrac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 60\ \text{s} && : \text{Zeit für } n \text{ Umdrehungen} \end{aligned}$$

gesucht: f

allgemeine Lösung:
Um die Frequenz des Motors zu berechnen verwende ich folgende Gleichung $f = \frac{n}{t}$.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} f &= \frac{2800}{60\ \text{s}} \\ &= 47\ \text{Hz} \end{aligned}$$

Die Frequenz des Motors beträgt 47 Hz.

A5/2 [3]: Die Achse eines Elektromotors rotiert mit $f = 60$ Hz. Wieviele Umdrehungen ergibt das in einer Minute?

gegeben:

$$
\begin{aligned}
f &= 60 \text{ Hz} && : \text{Drehfrequenz des Motors} \\
t &= 1 \text{ min} \cdot \tfrac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 60 \text{ s} && : \text{Zeit für Umdrehungen}
\end{aligned}
$$

gesucht: n

allgemeine Lösung:
Um die Frequenz des Motors zu berechnen verwende ich folgende Gleichung, welche ich nach n auflöse $f = \frac{n}{t} \iff n = f \cdot t$.

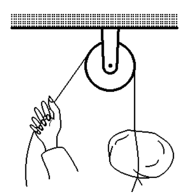
spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
n &= 60 \text{ Hz} \cdot 60 \text{ s} \\
&= 60 \, \frac{1}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} \\
&= 3600
\end{aligned}
$$

Der Elektromotor rotiert in einer Minute 3600 mal.

6 Grundgesetz der Dynamik

A6/1 [7]: Mit welcher Beschleunigung darf der Stein höchstens angehoben werden,



wenn das Seil bei der 10 fachen Gewichtskraft reißt?

gegeben: Belastbarkeit des Seils

gesucht: a

allgemeine Lösung:
Die maximale Kraft des Seils ist das zehnfache der Gewichtskraft des angehängten Steines, also $F_{\mathrm{max}} = 10 \cdot G$. Die Kraft die benötigt wird, um eine bestimmte Beschleunigung zu erzielen ergibt sich aus dem ersten Newtonschen Axiom $F = m \cdot a$. Die gesamte an dem Seil angreifende Kraft ist also die Gewichtskraft des Steines zuzüglich der Trägheitskraft bei einer Beschleunigung $F_{\mathrm{a}} = G + m \cdot a$. Die maximal mit diesem Seil mögliche Beschleunigung ergibt sich durch Gleichsetzen und auflösen der Gleichung für die Tragkraft und die für die Zugkraft

$$\begin{aligned} & 10 \cdot G = G + m \cdot a \\ \Longleftrightarrow\ & m \cdot a = 9 \cdot G \ \wedge \ G = m \cdot g \\ \Longleftrightarrow\ & m \cdot a = 9 \cdot m \cdot g \\ \Longleftrightarrow\ & a = 9 \cdot g. \end{aligned}$$

Es ist eine maximale Beschleunigung von $9 \cdot g$ möglich.

A6/2 [7]: Welche Beschleunigung erzielt ein Personenkraftwagen von 1250 kg Masse, auf dessen Räder von 62 cm Durchmesser ein Drehmoment von 340 N m übertragen wird?

gegeben:

$m = 1250\,\mathrm{kg}$	: Masse des Personenkraftwagens
$M = 340\,\mathrm{N\,m}$	: Drehmoment auf ein Rad des Automobils
$d = 62\,\mathrm{cm} \cdot \frac{1\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{cm}} = 0{,}62\,\mathrm{m}$	: Durchmesser der Räder des Wagens

gesucht: a

allgemeine Lösung:

Aus dem Drehmoment und dem Durchmesser für die Räder des Wagens kann man die auf die Straße gebrachte Kraft ermitteln $M = F \cdot s \iff F = \frac{M}{s}$, da der Kraftvektor senkrecht auf dem Wegvektor, dem Lot durch die Radachse auf die Straße, steht. Mittels des ersten Newtonschen Axioms ergibt sich dann die gesuchte Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} m \cdot a &= \frac{M}{s} \wedge s = \frac{d}{2} \\ \iff m \cdot a &= \frac{2 \cdot M}{d} \\ \iff a &= \frac{2 \cdot M}{d \cdot m}. \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2 \cdot 340\,\mathrm{N\,m}}{0{,}62\,\mathrm{m} \cdot 1250\,\mathrm{kg}} \\ &= 0{,}88\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Der Personenkraftwagen beschleunigt mit $0{,}88\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

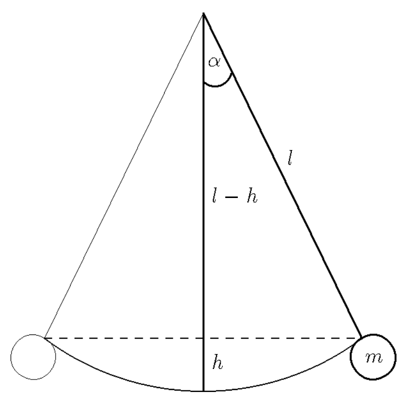
A6/3 [11]: Ein Kraftstoß wirkt $t = 0{,}01\,\mathrm{s}$ lang mit konstanter Stärke von $F = 20\,\mathrm{N}$ auf ein ruhendes Fadenpendel, dessen punktförmige Masse von $m = 6\,\mathrm{kg}$ an einem masselosen Faden der Länge $l = 1\,\mathrm{m}$ hängt. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit, die kinetische Energie und den Winkelausschlag des Pendels.

gegeben:

$t = 0{,}01$ s	: Wirkungsdauer der Krafteinwirkung
$F = 20$ N	: Stärke der wirkenden Kraft
$m = 6$ kg	: Masse des Pendels
$l = 1$ m	: Länge der Aufhängung

gesucht: v_0, E_{kin}, α

Skizze:



allgemeine Lösung:

Die durch den Kraftstoß erzielte Beschleunigung ergibt sich aus $F = m \cdot a \iff a = \frac{F}{m}$, die Anfangsgeschwindigkeit ist bei Beschleunigung a und Ruhe vor dem Stoß

$$a = \frac{v}{t} \iff v = a \cdot t \ \wedge\ a = \frac{F}{m} \Longrightarrow v_0 = \frac{F \cdot t}{m}.$$

Die anfängliche kinetische Energie ergibt sich mit der Gleichung für v_0 zu

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \ \wedge\ v_0 = \frac{F \cdot t}{m} \\ \iff E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{F \cdot t}{m}\right)^2 \\ \iff E_{\text{kin}} &= \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot m}. \end{aligned}$$

Der Winkel wird durch das rechtwinklige Dreieck beschrieben, die Länge l ist gegeben, die Ankathete ist die Fadenlänge vermindert um die erreichte Höhe. Diese wiederum errechne ich mittels der kinetischen Energie, da im höchsten Punkt die gesamte kinetische in potentielle Energie umgewandelt worden ist, also $m \cdot g \cdot h =$

$\frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot m} \iff h = \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot m^2}$. Der Winkel ist folglich

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = \frac{l-h}{l} \ \wedge \ h &= \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot m^2} \\
\iff \alpha &= \arccos \frac{l - \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot m^2}}{l} \\
&= \arccos \left(1 - \frac{F^2 \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot l \cdot m^2}\right).
\end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{20\ \mathrm{N} \cdot 0{,}01\ \mathrm{s}}{6\ \mathrm{kg}} \\
&= 0{,}033\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}} \\
&= 3{,}3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{kin}} &= \frac{20^2\ \mathrm{N}^2 \cdot 0{,}01^2\ \mathrm{s}^2}{2 \cdot 6\ \mathrm{kg}} \\
&= 0{,}0033\ \mathrm{J} \cdot \frac{1000\ \mathrm{mJ}}{1\ \mathrm{J}} \\
&= 3{,}3\ \mathrm{mJ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arccos\left(1 - \frac{20^2\ \mathrm{N}^2 \cdot 0{,}01^2\ \mathrm{s}^2}{2 \cdot 6^2\ \mathrm{kg}^2 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\ \mathrm{m}}\right) \\
&= 0{,}61°
\end{aligned}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $3{,}3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, die kinetische Energie zu Beginn ist 3,3 mJ, es wird ein Winkelausschlag von 0,61° erzielt.

7 Kräfte und Bewegung

A7/1 [8]: Der technische Überwachungsverein mißt die Bremsverzögerung in % der Fallbeschleunigung. Personenkraftwagen müssen mindestens 60 % davon haben. Ihr Auto habe gerade diese Verzögerung. Wie groß sind Anhalte- und Bremsstrecke aus $50, 100, 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$? (Der Anhalteweg berücksichtigt auch die Reaktionszeit[5] vor der eigentlichen Bremsung.)

gegeben:

$v_1 = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	: erste Geschwindigkeit
$v_2 = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	: zweite Geschwindigkeit
$v_3 = 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = 42\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$	: dritte Geschwindigkeit
a_B beträgt 60 % der Fallbeschleunigung	: Bremsverzögerung

gesucht: s_B

allgemeine Lösung:

Die Bremsverzögerung beträgt 60 % der Fallbeschleunigung, also $a_\text{B} = 0{,}6 \cdot g$. Die Gleichung für die beschleunigte Bewegung ist $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. Die Bremszeit beträgt $t = \frac{v}{a}$. Einsetzen der lezteren Gleichung in die erstere ergibt eine allgemeine Beziehung für den Bremsweg ohne Berücksichtigung der Reaktionszeit

$$\begin{aligned} s_\text{B} &= \frac{1}{2} \cdot a_\text{B} \cdot t^2 \;\wedge\; t = \frac{v}{a} \\ \Longleftrightarrow s_\text{B} &= \frac{1}{2} \cdot a_\text{B} \cdot \frac{v_0^2}{a_\text{B}^2} \\ \Longleftrightarrow s_\text{B} &= \frac{v_0^2}{2 \cdot a_\text{B}}. \end{aligned}$$

[5] Ich nehme bei meinen Berechnungen eine Reaktionszeit von $t_\text{R} = 1$ s *(Schrecksekunde)* an. Schrecksekunde

Der Weg, den das Fahrzeug während der Reaktionszeit zurücklegt, ist die gleichförmige Geschwindigkeit des Personenkraftwagens multipliziert mit der Reaktionszeit, also $s_{\mathrm{R}} = v_0 \cdot t_{\mathrm{R}}$. Der gesamte Bremsweg, aus minimalem Bremsweg und dem Weg, der während der Reaktionszeit zurückgelegt wird, beträgt

$$s_{\mathrm{A}} = \frac{v_0^2}{2 \cdot a_{\mathrm{B}}} + v_0 \cdot t_{\mathrm{R}}.$$

spezielle Lösung:

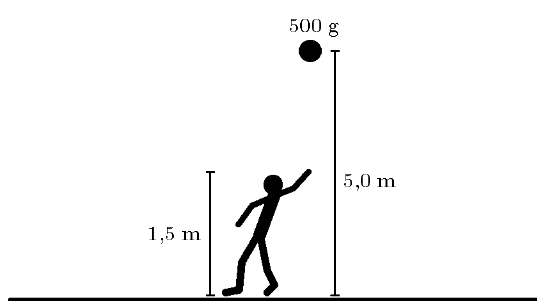
$$\begin{aligned}
s_{\mathrm{A}}^{v_1} &= \frac{14^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s} \\
&= 30\ \mathrm{m} \\
s_{\mathrm{A}}^{v_2} &= \frac{28^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + 28\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s} \\
&= 95\ \mathrm{m} \\
s_{\mathrm{A}}^{v_3} &= \frac{42^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} + 42\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s} \\
&= 192\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

Das Fahrzeug kommt bei 50 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ Anfangsgeschwindigkeit nach 30 m, bei 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nach 95 m und bei 150 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ nach 192 m zum stehen.

8 Arbeit und Energie

A8/1 [3]: Ein Ball, mit einer Masse von 500 g, wird aus einer Ausgangslage von 1,5 m über dem Erdboden senkrecht nach oben geworfen und erreicht eine Höhe von 5,0 m über dem Erdboden. Berechnen Sie die Lageenergie am Gipfelpunkt, gegenüber dem Boden, die Abwurfgeschwindigkeit und die Aufprallgeschwindigkeit am Boden.

Skizze:



gegeben:

$m = 500\text{ g} \cdot \frac{1\text{ kg}}{1000\text{ g}} = 0{,}5\text{ kg}$	: Masse des Balls
$h_0 = 1{,}5\text{ m}$	: Abwurfhöhe
$h_1 = 5{,}0\text{ m}$	: maximale Höhe

gesucht: E_{pot}, v_0, v_1

allgemeine Lösung:

Berechnung von E_{pot}*:*

Zur Berechnung der Lageenergie des Balles, im Kulminationspunkt, verwende ich die Gleichung $E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h_1$.

Berechnung von v_0:

1. kinematisch:

Es handelt sich bei der Bewegung des Balles um einen vertikalen Wurf nach oben, für welchen die Geschwindigkeitsgleichung $v = a \cdot t + v_0 \iff v - v_0 = a \cdot t \iff t = \frac{v-v_0}{a}$ gilt. Einsetzen in das Weg-Zeit-Gesetz dieser Bewegung ergibt

$$
\begin{aligned}
& s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \,\wedge\, t = \frac{v - v_0}{a} \\
\iff & s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} \\
\iff & s = \frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2}{2 \cdot a} + \frac{v_0 \cdot v - v_0^2}{a} \\
\iff & 2 \cdot a \cdot s = v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2 + 2 \cdot v \cdot v_0 - 2 \cdot v_0^2 \\
\iff & v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s \\
\iff & v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s},
\end{aligned}
$$

Kulminationspunkt

so daß $v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}$ die Geschwindigkeit des Balles in Abhängigkeit von seiner Höhe beschreibt[6] Im höchsten Punkt *(Kulminationspunkt)* ist der Weg maximal, die Geschwindigkeit hingegen $0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Es wird nur die Höhendifferenz, zwischen Abwurf- und Kulminationspunkt betrachtet, da diese Strecke anfänglich, durch die kinetische Energie des Wurf bedingt, durchflogen wird. Für $h = h_1 - h_0$ gilt $\sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0)} = 0$. Durch auflösen nach v_0 erhalte ich eine allgemeine Gleichung zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit des Balles

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0)} = 0 \\
\iff & v_0^2 = 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0) \\
\iff & v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0)}.
\end{aligned}
$$

2. Energieansatz:

Die Abwurfgeschwindigkeit läßt sich auch mittels der potentielle Energie zwischen Abwurfhöhe und Kulminationspunkt errechnen $E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$. Ferner gilt $\Delta h = h_1 - h_0$. Die kinetische Energie des Balles wird, durch den Aufstieg zum Kulminationspunkt, vollständig in Lageenergie umgewandelt. Die Bewegungsenergie ist $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$. Durch gleichsetzen der Beziehungen für die potentielle und die kinetische Energie und auflösen nach v_0 erhält man die

[6] Zu beachten ist hier, daß $a = -g$ gesetzt wurde, da $\vec{g}$ und $\vec{v}$ antiparallel zueinander sind, die Erdbeschleunigung wirkt der Bewegung des Balles entgegen.

Anfangsgeschwindigkeit des Balles

$$
\begin{aligned}
m \cdot g \cdot (h_1 - h_0) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \\
\Longleftrightarrow v_0^2 &= 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0) \\
\Longleftrightarrow v_0 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_0)}.
\end{aligned}
$$

3. gemischter Ansatz:

Angenommen man kehrt den Bewegungsvorgang um: *Ein, zuvor in Ruhe befindlicher, Ball der Masse m fällt von der Höhe h_1 bis zu einer Höhe h_0. Berechnen Sie die Geschwindigkeit in h_0!*
Die Geschwindigkeit in h_0 ergibt sich aus der 3. Bewegungsgleichung $v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$, wobei $v = v_0$, $a = g$ und $s = h_1 - h_0$ ist. Die Lageenergie von h_1 gegenüber h_0 wurde hierbei vollständig in kinetische Energie Umgewandelt, die durch die Gleichung $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ eindeutig bestimmt ist. Die Umkehrung der Betrachtung ist wegen der *Energieerhaltung* möglich. Es findet lediglich eine (verlustfreie) Überführung der Energieformen ineinander statt.

Die Übereinstimmung der resultierenden Gleichungen aus den Ansätzen, sind ein Beweis, daß alle drei Wege möglich sind, vorausgesetzt, daß jeder Lösungsweg für sich richtig ist.

Berechnung von v_1:
Es handelt sich dabei um einen freien Fall, ohne Anfangsgeschwindigkeit, dessen Ausgangsposition die des Kulminationspunktes ist. Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt. Die Gleichung $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ beschreibt die Beziehung zwischen Höhe und Aufprallgeschwindigkeit.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= 0{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\ \text{m} \\
&= 25\ \text{J}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5\ \text{m} - 1{,}5\ \text{m})} \\
&= 8{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\ \text{m}} \\
&= 9{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

Im Kulminationspunkt hat der Balle eine potentielle Energie von 25 J. Der Ball wurde mit einer Geschwindigkeit von 8,3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abgeworfen. Er schlägt mit 9,9 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf den Boden auf.

A8/2 [2]: Wie groß ist die kinetische Energie eines Geschosses von 6 g Masse bei einer Geschwindigkeit von 840 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$? Vergleichen Sie mit der kinetischen Energie einer Last von 3000 kg, die von einem Kran mit 0,4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ emporgezogen wird. Bei welcher Geschwindigkeit wäre die kinetische Energie der Last ebenso groß wie die des Geschosses?

gegeben:

$m_{\mathrm{G}} = 6\ \mathrm{g} \cdot \frac{1\ \mathrm{kg}}{1000\ \mathrm{g}} = 0{,}006\ \mathrm{kg}$	: Masse des Geschosses
$v_{\mathrm{G}} = 840\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	: Geschoßgeschwindigkeit
$m_{\mathrm{L}} = 3000\ \mathrm{kg}$	: Masse der Last
$v_{\mathrm{L}} = 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	: Hubgeschwindigkeit

gesucht: E_{kin}

allgemeine Lösung:

1. kinetische Energien:

Masse und Endgeschwindigkeit der Kugel und der Last sind gegeben, also sind die kinetischen Energien $E_{\mathrm{kin,\,G}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot v_{\mathrm{G}}^2$ und $E_{\mathrm{kin,\,L}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{L}} \cdot v_{\mathrm{L}}^2$.

2. Geschwindigkeit der Last:

Damit die Last die gleiche kinetische Energie erhält, wie die Kugel muß der Last eine Geschwindigkeit v erteilt werden. Die Geschwindigkeit v ergibt sich durch gleichsetzen der Beziehung für die kinetische Energie beider Körper. Zu beachten ist, daß die, im Aufgabentext gegebene, Geschwindigkeit der Last *nicht* der gesuchten entsprechen muß, also durch v ersetzt wird!

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot v_{\mathrm{G}}^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{L}} \cdot v^2 \\ \Longleftrightarrow v^2 &= \frac{m_{\mathrm{G}}}{m_{\mathrm{L}}} \cdot v_{\mathrm{G}}^2 \\ \Longleftrightarrow v &= v_{\mathrm{G}} \cdot \sqrt{\frac{m_{\mathrm{G}}}{m_{\mathrm{L}}}}. \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin, G}} &= \frac{1}{2} \cdot 0{,}006\ \text{kg} \cdot 840^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\
&= 2100\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{kJ}}{1000\ \text{J}} \\
&= 2{,}1\ \text{kJ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin, L}} &= \frac{1}{2} \cdot 3000\ \text{kg} \cdot 0{,}4^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\
&= 240\ \text{J}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v &= 840\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}006\ \text{kg}}{3000\ \text{kg}}} \\
&= 1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
$$

Die kinetische Energie des Geschosses beträgt 2,1 kJ, die der Last am Kran 240 J. Die Last am Kran müßte mit 1,2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewegt werden, damit sie die gleiche kinetische Energie hätte, wie das Geschoß.

9 Schwingungen

9.1 harmonische Schwingung

A9/1 [5]: Die Elongation eines harmonischen Oszillators beträgt $t = 0{,}2$ s nach dem Nulldurchgang $y = 4$ cm. Die Amplitude ist $\hat{y} = 6$ cm. Berechnen Sie die Frequenz und Periodendauer.

gegeben:

$y = 4$ cm	: Elongation
$\hat{y} = 6$ cm	: maximale Elongation
$t = 0{,}2$ s	: Zeitpunkt

gesucht: f, T

allgemeine Lösung:
Da es sich bei der Bewegung um eine harmonische Schwingung handelt gilt das Weg-Zeit-Gesetz $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Durch auflösen der Gleichung nach ω erhält man

$$y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t) \iff \frac{y}{\hat{y}} = \sin(\omega \cdot t)$$
$$\iff \omega \cdot t = \arcsin\left(\frac{y}{\hat{y}}\right) \iff \omega = \frac{\arcsin\left(\frac{y}{\hat{y}}\right)}{t}.$$

Wenn man nun diese Gleichung mit $\omega = 2\pi f$ verknüpft, so erhält man die Frequenz und Periode der Schwingung, da ferner $f = \frac{1}{T}$ gilt.

$$2\pi f = \frac{\arcsin\left(\frac{y}{\hat{y}}\right)}{t} \iff f = \frac{\arcsin\left(\frac{y}{\hat{y}}\right)}{2\pi t}.$$

spezielle Lösung:

$$f = \frac{\arcsin\left(\frac{0{,}04\ \mathrm{m}}{0{,}06\ \mathrm{m}}\right)}{2\pi \cdot 0{,}2\ \mathrm{s}}$$
$$= 0{,}6\ \mathrm{Hz}$$

$$T = \frac{1}{0{,}6\ \mathrm{Hz}}$$
$$= 1{,}7\ \mathrm{s}$$

Die Frequenz der Schwingung beträgt 0,6 Hz. Eine volle Schwingung dauert 1,7 s.

10 Gravitationspotential und Fallbeschleunigung

A10/1 [12]: Der Planet Merkur ist kugelförmig; Er hat den Radius $r_{\mathrm{M}} = 2{,}44 \cdot 10^{6}$ m und die Masse $m_{\mathrm{M}} = 3{,}30 \cdot 10^{23}$ kg.

a) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung g_0 für die Oberfläche des Planeten.

b) In der Höhe h_1 über der Oberfläche des Planeten beträgt die Fallbeschleunigung g_1 nur noch die Hälfte der Fallbeschleunigung g_0. Berechnen Sie die Höhe h_1.

c) Um den Merkurmittelpunkt soll ein Beobachtungssatellit kreisen, der von der Oberfläche des Planeten den Abstand h_1 *siehe b)* hat. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit v_1 für diesen Satelliten.

d) Von der Oberfläche des Planeten soll eine Rakete abgeschossen werden, die das Schwerefeld des Planeten verlassen kann. Berechnen Sie die Mindestgeschwindigkeit v_{F}, mit welcher die Rakete die Oberfläche des Planeten verlassen muß.

Anmerkung:

- Da der Planet Merkur keine Atmosphäre hat, steigt die Rakete ohne Reibungswiederstand auf.
- Gehen Sie davon aus, daß die Rakete die Geschwindigkeit v_F noch in unmittelbarer Nähe der Oberfläche des Planeten gewinnt.

gegeben:

$r_{\mathrm{M}} = 2{,}44 \cdot 10^{6}$ m	: Radius des Merkur
$m_{\mathrm{M}} = 3{,}30 \cdot 10^{23}$ kg	: Masse des Merkur

gesucht: g_0, h_1, v_1, v_{F}

allgemeine Lösung:

a) Für das Gewicht eines beliebigen Körpers, mit der Masse m_{K}, nahe der Oberfläche des Merkurs, gilt $G_0 = m_{\mathrm{K}} \cdot g_0$. Die Gewichtskraft ist aber auch gleichzeitig die Kraft, mit der die Masse des Planeten die Masse des Körpers anzieht, also $F = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{K}} \cdot m_R M}{r_{\mathrm{M}}^2}$. Gleichsetzen beider Formeln ergibt

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{K}} \cdot g_0 &= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{K}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}^2} \\ \Longleftrightarrow g_0 &= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}^2}. \end{aligned}$$

b) Die Herleitung ist wie bei a), nur ist hierbei für dir Fallbeschleunigung $g_1 = \frac{1}{2} \cdot g_0$ und beim Gravitationsgesetz der neue Radius $r = r_{\mathrm{M}} + h_1$ einzusetzen

$$\begin{aligned} g_1 = \frac{1}{2} \cdot g_0 &= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{(r_{\mathrm{M}} + h_1)^2} \\ \Longleftrightarrow (r_{\mathrm{M}} + h_1)^2 &= \gamma \cdot \frac{2 \cdot m_{\mathrm{M}}}{g_0} \\ \Longleftrightarrow r_{\mathrm{M}} + h_1 &= \sqrt{\gamma \cdot \frac{2 \cdot m_{\mathrm{M}}}{g_0}} \\ \Longleftrightarrow h_1 &= \sqrt{\gamma \cdot \frac{2 \cdot m_{\mathrm{M}}}{g_0}} - r_{\mathrm{M}} \\ \Longleftrightarrow h_1 &= \sqrt{\gamma \cdot \frac{2 \cdot m_{\mathrm{M}}}{g_0}} - r_{\mathrm{M}} \ \wedge \ g_0 = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}^2} \\ \Longleftrightarrow h_1 &= \sqrt{2} \cdot r_{\mathrm{M}} - r_{\mathrm{M}} \\ \Longleftrightarrow h_1 &= \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot r_{\mathrm{M}}. \end{aligned}$$

c) Damit ein Satellit, mit der Masse m_{S}, auf seiner kreisförmigen Bahn, mit dem Radius r_{S} bleibt, müssen die benötigte Radialkraft $F_{\mathrm{R}} = m_{\mathrm{S}} \cdot \frac{v_1^2}{r_{\mathrm{S}}}$ und Gewichtskraft $G_1 = m_{\mathrm{S}} \cdot g_1$ gleich sein. Der Radius ist wieder $r_{\mathrm{S}} = r_{\mathrm{M}} + h_1$.

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{S}} \cdot \frac{v_1^2}{r_{\mathrm{M}} + h_1} &= m_{\mathrm{S}} \cdot g_1 \\ \Longleftrightarrow \frac{v_1^2}{r_{\mathrm{M}} + h_1} &= g_1 \ \wedge \ g_1 = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{(r_{\mathrm{M}} + h_1)^2} \\ \Longleftrightarrow v_1^2 &= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}} + h_1} \\ \Longleftrightarrow v_1 &= \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}} + h_1}}. \end{aligned}$$

d) Die Energie für das Verlassen des Gravitationsfeldes des Merkurs wird der Rakete in Form von kinetischer Energie mitgegeben. Die aufzuwendende „Fluchtarbeit“ ist aber $W_{\mathrm{F}} = \int\limits_{r_{\mathrm{M}}}^{+\infty} \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{R}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{r^2} \, \mathrm{d}r$. Wenn man $m_{\mathrm{R}} = const.$ betrachtet, wie unter den

Anmerkungen zu d) gefordert, so ist

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{F}} &= \gamma \cdot m_{\mathrm{R}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \int\limits_{r_{\mathrm{M}}}^{+\infty} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \\ &= \gamma \cdot m_{\mathrm{R}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \lim_{u \to +\infty} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_{\mathrm{M}}}^{u} \\ &= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{R}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}}. \end{aligned}$$

Die mitzugebende kinetische Energie, um diese Höhe zu erreichen, ergibt sich auch aus $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{R}} \cdot v_{\mathrm{F}}^2$. Gleichsetzen für zur allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{R}} \cdot v_{\mathrm{F}}^2 &= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{R}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}} \\ \iff v_{\mathrm{F}}^2 &= 2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}} \\ \iff v_{\mathrm{F}} &= \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}}}. \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

a) $$\begin{aligned} g_0 &= \gamma \cdot \frac{3{,}30 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{(2{,}44 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2} \\ &= 3{,}70\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} h_1 &= (\sqrt{2} - 1) \cdot 2{,}44 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \\ &= 1{,}011 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\gamma \cdot \frac{3{,}30 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{2{,}44 \cdot 10^6\ \mathrm{m} + 1{,}011 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} \\ &= 2530\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} v_{\mathrm{F}} &= \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{3{,}30 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{2{,}44 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} \\ &= 4250\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{km}}{1000\ \mathrm{m}} \\ &= 4{,}250\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Die Fallbeschleunigung auf der Oberfläche des Merkur beträgt 3,70 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. In einer Höhe von $1{,}011 \cdot 10^6$ m halbiert sie sich. Ein Satellit muß mit 2530 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ fliegen um diese Höhe zu halten. Die Fluchtgeschwindigkeit für eine Rakete vom Merkur beträgt 4,250 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$

A10/2 [12]: Der Mond hat den Radius $r_\text{M} = 1{,}74 \cdot 10^6$ m und die Masse $m_\text{M} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

a) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung g_0 für die Mondoberfläche und die Fallbeschleunigung g_1 für die Höhe $h_1 = 597$ km über der Mondoberfläche.

b) Astronauten auf dem Mond schießen ein Geschoß mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal nach oben ab. Da der Mond keine Atmosphäre hat, steigt das Geschoß ohne Reibungswiederstand auf; Es erreicht die maximale Höhe h_1 *siehe a)*. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0.

c) Das Geschoß fällt aus der Höhe h_1 im freien Fall zurück und trifft mit der Geschwindigkeit v_auf wieder auf die Mondoberfläche. Der Energieerhaltungssatz sagt aus: $v_\text{auf} = v_0$. Nehmen Sie jedoch v_auf als unbekannt an. Berechnen Sie v_auf mit Hilfe des Weg-Geschwindigkeit-Gesetzes für den freien Fall, indem Sie die Fallbeschleunigung g als innerhalb des Fallweges konstant ansetzen, und zwar

c$_1$) als arithmetisches Mittel $g = \frac{1}{2} \cdot (g_0 + g_1)$,

c$_2$) als geometrisches Mittel $g = \sqrt{g_0 + g_1}$.

Zeigen Sie auf diese Weise, daß Sie das richtige Ergebnis nur mit Hilfe des geometrischen Mittels erhalten.

d) Beweisen Sie allgemein, daß man mit Hilfe des geometrischen Mittels der Fallbeschleunigung $v_\text{auf} = v_0$ erhält.

gegeben:

$r_\text{M} = 1{,}74 \cdot 10^6$ m	: Radius des Mondes
$m_\text{M} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	: Masse des Mondes
$h_1 = 597\text{ km} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} = 5{,}97 \cdot 10^5$ m	: Schußhöhe der Astronauten

gesucht: g_0, g_1, v_0, v_auf

allgemeine Lösung:

a) Für das Gewicht eines beliebigen Körpers, mit der Masse m_K, nahe der Oberfläche des Mondes, gilt $G_0 = m_\text{K} \cdot g_0$. Die Gewichtskraft ist aber auch gleichzeitig die Kraft, mit der die Masse des Mondes die Masse des Körpers anzieht, also $F = \gamma \cdot \frac{m_\text{K} \cdot m_\text{M}}{r_\text{M}^2}$. Da der Mond nicht um seine Achse rotiert entfällt eine zusätzliche Zentripetalkraft, wie sie bei der Erde auftritt. Gleichsetzen beider Gleichungen ergibt für die Fallbeschleunigung des Mondes

$$m_{\mathrm{K}} \cdot g_0 = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{K}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}^2} \iff g_0 = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}^2}.$$

Für die Berechnung von g_1 muß der Abstand im Gravitationsgesetz auf $r = r_{\mathrm{M}} + h_1$ gesetzt werden $g_1 = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{M}}}{(r_{\mathrm{M}}+h_1)^2}$.

b) Die Energie um das Geschoß, das die Masse m_{G} besitzt, auf die Höhe h_1 bringen zu können ergibt sich aus dem Gravitationsgesetz, wenn man, mit dem Anfangs- und dem Endpunkt, des vertikalen Wurfes, als Intervallgrenzen, integriert, zu

$$\begin{aligned}
W &= \int\limits_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{M}}+h_1} \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{G}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{r^2}\,\mathrm{d}r = \gamma \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \int\limits_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{M}}+h_1} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \gamma \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_{\mathrm{M}}}^{r_{\mathrm{M}}+h_1} \\
&= \gamma \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \left(-\frac{1}{r_{\mathrm{M}}+h_1} - \left(-\frac{1}{r_{\mathrm{M}}}\right)\right) \\
&= \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{G}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot h_1}{r_{\mathrm{M}} \cdot (r_{\mathrm{M}}+h_1)}.
\end{aligned}$$

Die mitzugebende kinetische Energie ist aber $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot v_0^2$. Gleichsetzen für zur allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot m_{\mathrm{G}} \cdot v_0^2 = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{G}} \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot h_1}{r_{\mathrm{M}} \cdot (r_{\mathrm{M}}+h_1)} \\
\iff\ & v_0^2 = 2 \cdot \gamma \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \frac{h_1}{r_{\mathrm{M}} \cdot (r_{\mathrm{M}}+h_1)} \\
\iff\ & v_0 = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_{\mathrm{M}} \cdot \frac{h_1}{r_{\mathrm{M}} \cdot (r_{\mathrm{M}}+h_1)}}.
\end{aligned}$$

c) Das Zeit-Geschwindigkeit-Gesetz lautet $v = g \cdot t$. Die gesuchte Zeit ermittele ich aus dem Zeit-Weg-Gesetz der konstant beschleunigten Bewegung

$$\begin{aligned}
& s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \iff t^2 = \frac{2 \cdot s}{g} \iff t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} \wedge v = g \cdot t \\
\iff\ & v = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} \iff v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Mittelwertbildungsgleichungen ergibt dann für die Aufschlaggeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{auf}} = \sqrt{(g_0 + g_1) \cdot h_1} \quad \text{oder} \quad v_{\mathrm{auf}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{g_0 \cdot g_1} \cdot h_1}.$$

d) Ich verwende die Gleichung aus c), in die ich die Formeln für g_0 und g_1 einsetze

$$\begin{aligned}
v_{\text{auf}} &= \sqrt{2 \cdot \sqrt{g_0 \cdot g_1} \cdot h_1} \;\wedge\; g_0 = \gamma \cdot \frac{m_{\text{M}}}{r_{\text{M}}^2} \;\wedge\; g_1 = \gamma \cdot \frac{m_{\text{M}}}{(r_{\text{M}} + h_1)^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_{\text{M}}}{r_{\text{M}}^2} \cdot \gamma \cdot \frac{m_{\text{M}}}{(r_{\text{M}} + h_1)^2}} \cdot h_1} \\
&= \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot \frac{m_{\text{M}}}{r_{\text{M}} \cdot (r_{\text{M}} + h_1)} \cdot h_1}.
\end{aligned}$$

Die oben durchgeführten Umformungen sind zulässig, da $m_{\text{M}}, r_{\text{M}}, h_1 \geq 0$. Die Endform der Gleichung entspricht der aus b), es gilt also $v_{\text{auf}} = v_0$, die Energieerhaltung ist somit erfüllt, q.e.d.

spezielle Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
g_0 &= \gamma \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m})^2} \\
&= 1{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
g_1 &= \gamma \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m} + 5{,}97 \cdot 10^5\ \text{m})^2} \\
&= 0{,}898\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot \frac{5{,}95 \cdot 10^5\ \text{m}}{1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot (1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m} + 5{,}95 \cdot 10^5\ \text{m})}} \\
&= 1200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

c_1

$$\begin{aligned}
v_{\text{auf}} &= \sqrt{\left(1{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0{,}898\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 5{,}97 \cdot 10^5\ \text{m}} \\
&= 1226\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \neq v_0
\end{aligned}$$

c_2

$$\begin{aligned}
v_{\text{auf}} &= \sqrt{2 \cdot \sqrt{\left(1{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}898\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}} \cdot 5{,}97 \cdot 10^5\ \text{m} \\
&= 1200\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_0
\end{aligned}$$

Die Fallbeschleunigung auf der Mondoberfläche beträgt $1{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, in der Höhe h_1 aber nur noch $0{,}898\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Die Anfangsgeschwindigkeit, des von den Astronauten abgeschossenen Projektils beträgt $1200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Durch arithmetische Mittelwertbildung der Fallbeschleunigung zwischen der Mondoberfläche und der Höhe h_1 erhält man ein falsches Ergebnis. Das richtige Ergebnis ergibt die geometrische Mittelwertbildung.

11 Spezielle Relativitätstheorie

11.1 Grundprinzipien der Relativitätstheorie

A11/1 [5]: In der Relativitätstheorie hat die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem den gleichen Wert c. Man bezeichnet dies als Invarianz der Lichtgeschwindigkeit. Gibt es auch in der klassischen Physik eine invariante Geschwindigkeit, die also bei einem Wechsel des Inertialsystems ihren Wert nicht ändert.

allgemeine Lösung:

Wechselt man in der *klassischen* Physik von einem Inertialsystem I, in dem ein Körper mit $\vec{v}_0$ bewegt wird, zu einem Inertialsystem I', welches sich mit $\vec{v}\,'$, relativ zu I bewegt, so wird die Geschwindigkeit des Körpers in I' nach der Beziehung $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'$ bestimmt. Da diese sogenannte GALILEI-*Transformation* für alle Geschwindigkeiten, somit auch für die Lichtgeschwindigkeit, gilt gibt es keine invarianten Geschwindigkeiten in der klassischen Physik. Die Erfahrung lehrt, daß dieser Standpunkt bei großen Geschwindigkeiten falsch ist. Galilei-Transformation

A11/2 [5]: Stellen Sie sich vor, Sie hielten vor sich einen Handspiegel und würden mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum laufen. Könnten Sie sich dann in dem Spiegel sehen? Was sagt die klassische Physik und was die Relativitätstheorie zu diesem Problem?

allgemeine Lösung:

klassisch: Nach der klassischen Physik würde der Läufer mit Lichtgeschwindigkeit laufen, Die von, dem sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegenden Läufer, ausgehenden Lichtstrahlen würden, ähnlich, wie bei den *Schallwellen* bei einem Flugzeug, welches mit Schallgeschwindigkeit fliegt, mit ihm auf einer Höhe bleiben und eine „Lichtmauer“[7] aufbauen vergleichbar mit der Schallmauer. Die Lichtstrahlen würden folglich niemals den Spiegel erreichen können. Der Läufer sähe sein Abbild somit nie. Schallmauer

relativistisch: Nach der Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen *konstant*, deshalb auch in dem System, in dem der Läufer in Ruhe ist und der Rest, um ihn herum, sich entgegengesetzt gerichtet zu dem System, in dem er „läuft“, bewegt. In dem Inertialsystem, in dem er in Ruhe gedacht ist, sieht er, aufgrund dieser Konstanz, sein Abbild im Handspiegel.

A11/3 [5]: Wieso widerspricht das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit der klassischen Addition der Geschwindigkeiten? Was folgt daraus für die klassische Addition von Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie?

allgemeine Lösung:

Währe die Lichtgeschwindigkeit nicht konstant, so würde man in einem, zu der Erde, mit der Relativgeschwindigkeit v bewegten Intertialsystem I, die Geschwindigkeit eines Lichtstrahles, auf der Erde, in der Bewegungsrichtung von I, zu $c + v$ messen. Diesen Effekt sollte das MICHELSON-Experiment bestätigen, was es natürlich nicht tat. Die klassische Addition von Geschwindigkeiten führt somit zu einem *falschen* Ergebnis. Für, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigbare Geschwindigkeiten $v \ll c$ stellt die klassische Addition von Geschwindigkeiten eine gute *Näherung* des relativistischen Additionstheorems dar.

11.2 Relativistische Kinematik

11.2.1 Relative Gleichzeitigkeit

A11/4 [5]: Der Relativitätsexpreß rast mit nahezu Lichtgeschwindigkeit dahin. Da schlägt ein Blitz in das vordere und ein Blitz in das hintere Ende des Zuges ein. Ein Reisender, der sich in der Mitte des Zuges befindet, und ein Bahnwärter draußen am Bahndamm sehen die Blitze gleichzeitig. Beim Eintreffen der von den Blitzen ausgesandten Lichtsignale befinden sich der Reisende und der Bahnw,rter auf gleicher Höhe. Welche Schlüsse ziehen beide daraus über die Zeiten, zu denen die Blitze einschlugen?

[7] Eine Lichtmauer wird in so manchem *Science Fiction* Abenteuer erwähnt, wie beispielsweise im *„Krieg der Sterne“*. Science Fiction Krieg der Sterne

allgemeine Lösung:

Die Lichtsignale der Blitze sind im Bezugsystem des Bahnwärters! Die Lichtsignale gehen von beiden Blitzen auf dem Weg zum Zug aus. Das die Blitze im Bezugsystem des Bahnwärter sein müssen folgt aus der Aufgabenstelle, wo steht, daß *beide* die Blitze gleichzeitig sehen! Würde die Blitze im Ruhesystem des Zuges einschlagen, so würde nur der Reisende diese gleichzeitig sehen.

Reisender: Damit beide die Lichtsignale gleichzeitig erreichen muß der vordere Blitz $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ später als der hintere Blitz $\mathfrak{B}_\mathfrak{h}$ einschlagen, da der Relativitätsexpreß den Lichtsignalen des $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ entgegenläuft und dem $\mathfrak{B}_\mathfrak{h}$ davonläuft.

Bahnwärter: Da der Zug noch nicht mit ihm auf einer Höhe ist, benötigen die Lichtsignale von $\mathfrak{B}_\mathfrak{h}$ eine längere Zeit, als die von $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ um zu ihm zu gelangen.

A11/5 [5]: Zwei Raumschiffe fliegen mit halber Lichtgeschwindigkeit durch das Sonnensystem. Ihr Abstand im Sonnensystem beträgt konstant 600000 km. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem die Besatzung der beiden Raumschiffe die Uhren an Bord synchronisiert. Um wieviel werden die Uhren im hinteren Raumschiff für einen Beobachter auf einem Planeten eher in Gang gesetzt?

gegeben:

$s = 600000\ \mathrm{km}$	: Abstand der Raumschiffe
$v = \frac{c}{2} = 150000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$	: Geschwindigkeit der Schiffe

gesucht: Δt

allgemeine Lösung:

Die Besatzung synchronisiert ihre Uhren mittels EINSTEIN-Synchronisation, daß heißt in ihrer geometrischen Mitte wird eine Blitzlichtlampe gezündet. Wenn die Raumschiffe in Ruhe gedacht werden, so erreichen die Lichtsignale die Uhren auf beiden Schiffen zur gleichen Zeit $\Delta t = \frac{s}{2\,c}$! Der Beobachter auf dem Planeten hingegen sieht die Lichtsignale dem hinteren Raumschiff entgegenlaufen und dem vorderen hinterherlaufen. EINSTEIN-Synchronisat

Das entgegenlaufende Signal muß den Weg $\frac{s}{2} - v \cdot \Delta t_1$ zurücklegen, wobei Δt_1 die Zeit bis zum Start der Uhr im hinteren Schiff ist. Das hinterherlaufende Signal muß den Weg $\frac{s}{2} + v \cdot \Delta t_2$ zurücklegen, wobei Δt_2 die Zeit bis zum Start der Uhr im hinteren Schiff ist. Die Differenz $\Delta t_2 - \Delta t_1$ ist der Gangunterschied beide Uhren aus der Sicht des Beobachter auf dem Planeten. Die Zeiten betragen mit $i \in \{1;2\}$

$$\Delta t_i = \frac{\frac{s}{2} \mp v \cdot \Delta t_i}{c} \iff \Delta t_i \pm \frac{v}{c} \cdot \Delta t_i = \frac{s}{2\,c} \iff \Delta t_i \cdot \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) = \frac{s}{2\,c}$$

$$\Longleftrightarrow \Delta t_i = \frac{s}{2\,c \cdot \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)} \Longleftrightarrow \Delta t_i = \frac{s}{2\,c \pm 2\,v}.$$

Der Gangunterschied der Uhren ist somit

$$\Delta t = \frac{s}{2\,c - 2\,v} - \frac{s}{2\,c + 2\,v}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{600000\,\mathrm{km}}{2 \cdot 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} - 2 \cdot 150000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} - \frac{600000\,\mathrm{km}}{2 \cdot 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} + 2 \cdot 150000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}\\ &= 1{,}33\ \mathrm{s}\end{aligned}$$

Die Uhr im hinteren Raumschiff wird, vom Planeten aus gesehen, 1,33 s früher, als die im vorderen, gestartet.

11.2.2 Zeitdilatation

A11/6 [5]: Zwei synchronisierte Uhren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben auf der Erde einen Abstand von 600 km. Eine Rakete fliegt mit der Geschwindigkeit $v = \frac{12}{13}\,c$ über die Erde hinweg und kommt erst an Uhr $\mathfrak{A}$, dann an Uhr $\mathfrak{B}$ vorbei. Bei $\mathfrak{A}$ zeigt eine Uhr in der Rakete die gleiche Zeit, wie Uhr $\mathfrak{A}$ an. Welche Zeit zeigt die Raketenuhr im Vergleich zur Uhr $\mathfrak{B}$ an, wenn sie über diese hinwegfliegt?

gegeben:

$s = 600$ km	: Abstand zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$
$v = \frac{12}{13}\,c$	: Geschwindigkeit der Rakete

gesucht: t

allgemeine Lösung:

Das „ruhende“ Inertialsystem enthält $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Als erstes ist die Zeit zu bestimmen, die die Rakete benötigt um die Strecke zwischen den synchronisierten Uhren zu durchfliegen. Da die Bewegung gleichförmig geradlinig ist, gilt für die Zeit t_R im ruhenden System $t_\mathrm{R} = \frac{s}{v}$. Die Zeit im bewegten Inertialsystem beträgt

$$\begin{aligned} t &= t_\mathrm{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;\wedge\; t_\mathrm{R} = \frac{s}{v}\\ \Longleftrightarrow t &= \frac{s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}\\ \Longleftrightarrow t &= s \cdot \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}.\end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}
t_{\mathrm{R}} &= \frac{600\ \mathrm{km}}{\frac{12}{13}\cdot 3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\\
&= 2{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}\cdot\frac{1\ \mu\mathrm{s}}{1000\ \mathrm{s}}\\
&= 2{,}2\ \mu\mathrm{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t &= 600\ \mathrm{km}\cdot\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{12}{13}\cdot 3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}-\frac{1}{\left(3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}}\\
&= 8{,}3\cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}\cdot\frac{1\ \mu\mathrm{s}}{1000\ \mathrm{s}}\\
&= 0{,}83\ \mu\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Die Uhr $\mathfrak{B}$ zeigt 2,2 μs, die Uhr in der Rakete zeigt eine Zeit von 0,83 μs an.

A11/7 [5]: Ein 30jähriger Weltraumfahrer startet im Jahr 1989 zu einer Reise durch das Weltall. Seine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit beträgt relativ zur Erde gemessen $v = \frac{40}{41}c$. Wie alt ist der Weltraumfahrer, wenn er im Jahr 2030 zurückkehrt?

gegeben:

$v = \frac{40}{41}c$	: Reisegeschwindigkeit des Astronauten
$a_0 = 30\ \mathrm{a}$	: Alter zu Reisebeginn
$\Delta t_{\mathrm{R}} = 2030\ \mathrm{a} - 1989\ \mathrm{a}$	: Dauer der Reise von der Erde aus

gesucht: a

allgemeine Lösung:

Die Reise dauert, von der Erde aus gesehen, Δt_{R}. An Bord des Raumschiffes wird sie gedehnt, so daß der Astronaut um

$$\Delta t = \Delta t_{\mathrm{R}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

altert. Sein Alter beträgt somit $a = a_0 + \Delta t$

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
a &= 30\ \mathrm{a} + (2030\ \mathrm{a} - 1989\ \mathrm{a}) \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{40}{41} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{\left(3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}} \\
&= 36{,}4\ \mathrm{a} = 36\ \mathrm{a} + 0{,}4\ \mathrm{a} \cdot \frac{365\ \mathrm{d}}{1\ \mathrm{a}} \\
&= 36\ \mathrm{a}\ \ 146\ \mathrm{d}
\end{aligned}
$$

Der Astronaut ist nach der Reise 36 a 146 d alt, obschon er, wenn er auf der Erde geblieben wäre, bereits 71 a alt wäre.

Alpha-Centauri **A11/8 [5]:** Der nächste Fixstern ist *Alpha-Centauri* am südlichen Sternenhimmel. Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.

a) Wie lange bräuchte ein Raumschiff, um zu dem Stern zu gelangen, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0{,}5\,c$ beträgt?

b) Wie lange würde der Flug für die Astronauten an Bord des Raumschiffs dauern?

c) Welche Geschwindigkeit müßte das Raumschiff haben, damit für die Besatzung während der Reise nur ein Jahr vergeht?

gegeben:

$$
\begin{aligned}
s &= 4{,}5\ \mathrm{La} \cdot \tfrac{9{,}46 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{La}} = 4{,}26 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m} && : \text{Flugstrecke} \\
v &= 0{,}5\,c \cdot \tfrac{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{c} = 1{,}5 \cdot 10^8\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} && : \text{Reisegeschwindigkeit} \\
\Delta t_{\mathrm{B}} &= 1\ \mathrm{a} \cdot \tfrac{365 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{a}} = 3{,}15 \cdot 10^7\ \mathrm{s} && : \text{Reisedauer an Bord}
\end{aligned}
$$

gesucht: Δt_{R}, Δt, v_1

allgemeine Lösung:

a) Da es sich bei dem Flug des Raumschiffes um eine gleichförmige Bewegung handelt beträgt die Flugdauer, von der Erde aus gesehen,

$$
v = \frac{s}{\Delta t_{\mathrm{R}}} \iff \Delta t_{\mathrm{R}} = \frac{s}{v}.
$$

b) Aufgrund der Zeitdilatation dauert die Reise, für die Astronauten, mit der Gleichung aus a) nur

$$\Delta t = \Delta t_{\mathrm{R}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;\wedge\; \Delta t_{\mathrm{R}} = \frac{s}{v} \iff \Delta t = \frac{s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} = s \cdot \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

c) Sei die Dauer der Reise Δt, an Bord der Rakete, gegeben, dann resultiert für die Flugdauer auf der Erde $\Delta t = \Delta t_{\mathrm{R}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \iff \Delta t_{\mathrm{R}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$, so daß sich mit $v_1 = \frac{s}{\Delta t_{\mathrm{R}}}$ die Reisegeschwindigkeit zu

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{s}{\Delta t} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \\
\iff v_1^2 &= \frac{s^2}{\Delta t^2} \cdot \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \\
\iff v_1^2 &= \frac{s^2}{\Delta t^2} - \frac{s^2}{\Delta t^2} \cdot \frac{v_1^2}{c^2} \\
\iff v_1^2 + \frac{s^2}{\Delta t^2} \cdot \frac{v_1^2}{c^2} &= \frac{s^2}{\Delta t^2} \\
\iff v_1^2 \cdot \left(1 + \frac{s^2}{c^2 \cdot \Delta t^2}\right) &= \frac{s^2}{\Delta t^2} \\
\iff v_1^2 &= \frac{s^2}{\Delta t^2 \cdot \left(1 + \frac{s^2}{c^2 \cdot \Delta t^2}\right)} \\
\iff v_1 &= \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t^2 + \frac{s^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

ergibt.

spezielle Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
\Delta t_{\mathrm{R}} &= \frac{4{,}26 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}}{1{,}5 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}} \\
&= 2{,}84 \cdot 10^{8}\ \mathrm{s} \cdot \frac{1\ \mathrm{a}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} \\
&= 9\ \mathrm{a}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\Delta t &= 4{,}26 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1{,}5 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} - \frac{1}{\left(3 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}} \\
&= 2{,}46 \cdot 10^{8}\ \mathrm{s} \cdot \frac{1\ \mathrm{a}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} = 7\ \mathrm{a} + 0{,}8\ \mathrm{a} \cdot \frac{365\ \mathrm{d}}{1\ \mathrm{a}} \\
&= 7\ \mathrm{a}\ \ 292\ \mathrm{d}
\end{aligned}$$

c) $$v_1 = \sqrt{\frac{(4{,}26 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m})^2}{\Delta\,(3{,}15 \cdot 10^7\ \mathrm{s})^2 + \frac{(4{,}26 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m})^2}{\left(3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}\right)^2}}}$$
$$= 2{,}93 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$
$$= 0{,}976\,c$$

Das Raumschiff benötigt, von der Erde aus gesehen 9 a bis zum erreichen von Alpha-Centauri. An Bord vergehen derweil 7 a 292 d. Für eine wahrgenommene einjährige Flugdauer an Bord, muß die Rakete $0{,}976\,c$ fliegen.

12 Druck

A12/1 [7]: Wieviel Pascal beträgt der Luftdruck in einem Behälter, wenn er, von 950 mbar ausgehend, um $5 \cdot 10^4$ Pa erhöht wird?

gegeben:

$$
\begin{array}{ll}
p_0 = 950\,\mathrm{mbar} = 950\,\mathrm{hPa} \cdot \frac{100\ \mathrm{Pa}}{1\ \mathrm{hPa}} = 9{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} & : \text{Ausgangsdruck} \\
\Delta p = 5 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} & : \text{Druckerhöhung}
\end{array}
$$

gesucht: p

allgemeine Lösung:
Nach der Einheitenumwandlung werden die Werte addiert, um den resultierenden Druck zu erhalten, da es sich ja um eine Druckerhöhung handelt $p = p_0 + \Delta p$.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
p &= 9{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} + 5 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa} \\
&= 1{,}45 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}
\end{aligned}
$$

Der Enddruck in dem betrachteten Behälter beträgt $1{,}45 \cdot 10^5$ Pa.

13 Längenausdehnung

A13/1 [7]: Welchen Längenausdehnungskoeffizient hat eine Glassorte, die sich bei Erwärmung um 65 K um 0,4 ‰ ausdehnt?

gegeben:

$\Delta T = 65$ K : Temperaturdifferenz
$p = 0{,}4$ ‰ : Promilleangabe

gesucht: α

allgemeine Lösung:
Die Aufgabenstellung enthält bereits den Längenausdehnungskoeffizienten verpackt in einer Promilleangabe. Der Faktor, um den sich die Glassorte bei Erhöhung um 1 K ausdehnt, ist $p = \alpha \cdot \Delta\vartheta \iff \alpha = \frac{p}{\Delta\vartheta}$.

spezielle Lösung:

$$\alpha = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-3}}{65\ \mathrm{K}} = 6{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$$

Der lineare Längenausdehnungskoeffizient beträgt $6{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$.

A13/2 [7]: Wie lang muß ein Messingrohr ($\alpha = 18 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$) bei 15 ℃ sein, und welchen inneren Durchmesser muß es haben, damit es bei 60 ℃ eine Länge von 50 cm und eine lichte Weite von 20 mm hat?

gegeben:

$l_0 = 50$ cm	: Ausgangslänge des Messingrohres
$d_0 = 20$ mm	: Ausgangsdicke des Messingrohres
$\vartheta_1 = 15$ ℃	: Ausgangstemperatur
$\vartheta_2 = 60$ ℃	: Endtemperatur
$\alpha = 18 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$	: Längenausdehnungskoeffizient von Messing

gesucht: l_ϑ, d_ϑ

allgemeine Lösung:

Für die Länge des abgekühlten Messingrohres gilt die Gleichung $l_\vartheta = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$, in die ich die negative Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ einsetze. Die Differenz ist negativ, da die Ausgangstemperatur größer als die Endtemperatur ist.
Um den Durchmesser nach der Abkühlung zu berechnen setze ich für die Länge des Messingstücks den Umfang des Rohres ein. Der Umfang des Messingrohres ist $U = 2\pi r \ \wedge \ r = \frac{d}{2} \iff U = \pi \cdot d$, und es ergibt sich für den Durchmesser $\pi d_\vartheta = \pi d_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta) \iff d_\vartheta = d_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
l_\vartheta &= 50\ \mathrm{cm} \cdot \big(1 + 18 \cdot 10^{-6}\ ℃^{-1} \cdot (15\ ℃ - 60\ ℃)\big) \\
&= 49{,}95\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_\vartheta &= 22\ \mathrm{mm} \cdot \big(1 + 18 \cdot 10^{-6}\ ℃^{-1} \cdot (15\ ℃ - 60\ ℃)\big) \\
&= 19{,}98\ \mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Die Ausgangslänge muß vor dem Erwärmen 49,95 cm und der Ausgangsdurchmesser muß 19,98 mm betragen haben.

A13/3 [7]: Wieviel Spielraum erhalten bei -5 ℃ genau passende Kolbenringe von 3 mm Breite aus Stahl ($\alpha_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ ℃^{-1}$) in den Nuten des Kolbens ($\alpha_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ ℃^{-1}$) bei einer Betriebstemperatur von 250 ℃?

gegeben:

$b_0 = 3$ mm	: Ausgangsbreite von Kolbenringen und Nuten
$\vartheta_1 = 250$ °C	: Anfangstemperatur
$\vartheta_2 = -5$ °C	: Endtemperatur
$\alpha_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}	: Ausdehnungskoeffizient der Kolbenringe
$\alpha_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}	: Ausdehnungskoeffizient der Nuten

gesucht: Δb

allgemeine Lösung:

Zuerst ist die Ausdehnung der Kolbenringe in vertikaler Richtung zu ermitteln, was nach der Gleichung $l_\vartheta = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$. Als nächstes ermittele ich die Ausdehnung der Nuten des Kolbens nach der gleichen Beziehung. Die Differenz zwischen Nutenlängen und Kolbenringlänge ist der gesuchte Spielraum

$$\begin{aligned}\Delta b &= b_0 \cdot (1 + \alpha_2 \cdot \Delta\vartheta) - b_0 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta) \\ &= b_0 \cdot (1 + \alpha_2 \cdot \Delta\vartheta - 1 - \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta) \\ &= b_0 \cdot (\alpha_2 \cdot \Delta\vartheta - \alpha_1 \cdot \Delta\vartheta) \\ &= b_0 \cdot \Delta\vartheta \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= b_0 \cdot \Delta\alpha \cdot \Delta\vartheta.\end{aligned}$$

Die Differenz $\Delta b \geq 0$, da $\alpha_2 > \alpha_1$, die Nuten dehnen sich bei gleicher Ausgangsbreite stärker aus als die Kolbenringe.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}\Delta b &= 3\ \text{mm} \cdot (250\ \text{°C} + 5\ \text{°C}) \cdot (2{,}4 - 1{,}3) \cdot 10^{-6}\ \text{°C} \\ &= 8{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{mm} \cdot \frac{1000\ \mu\text{m}}{1\ \text{mm}} \\ &= 8{,}4\ \mu\text{m}\end{aligned}$$

Der Kolbenring hat bei -5 °C einen Spielraum von 8,4 μm.

<u>**A13/4 [7]:**</u> Bei der Celsiustemperatur ϑ ist die Länge des deutschen Urmeters

$$l = 1\ \text{m} - 1{,}50\ \mu\text{m} + \{8{,}621 \cdot \vartheta + 0{,}00180 \cdot \vartheta^2\}\ \mu\text{m}.$$

Wieviel Millimeter beträgt seine Länge bei 18 °C?

gegeben:

$\vartheta = 18$ °C	: Temperatur des Urmeters
$l(\vartheta)$	: Gleichung für die Länge des Urmeters

gesucht: l

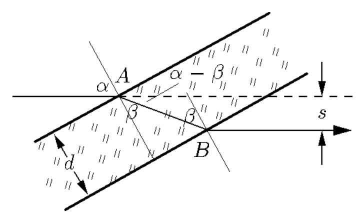
allgemeine Lösung:
Einsetzen und Einheitenumwandlung führt zu dem gesuchten Ergebnis.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} l &= 1\text{ m} - 1{,}5\ \mu\text{m} \cdot \tfrac{1\text{ m}}{10^6\ \mu\text{m}} + \tfrac{\{8{,}621 \cdot 18\ ^\circ\text{C} + 0{,}00180 \cdot 18^2\ ^\circ\text{C}^2\}\ \mu\text{m} \cdot 1\text{ m}}{10^6\ \mu\text{m}} \\ &= 1\text{ m} - 1{,}5 \cdot 10^{-6}\text{ m} + \{8{,}621 \cdot 18\ ^\circ\text{C} + 0{,}00180 \cdot 18^2\ ^\circ\text{C}^2\} \cdot 10^{-6}\text{ m} \\ &= 1{,}000154\text{ m} \end{aligned}$$

Der Urmeter hat eine Länge von 1,000154 m.

14 Reflexion und Brechung an ebenen Flächen



A14/1 [2]: Ein einfarbiger Lichtstrahl erfährt beim Durchgang planparallele Platte eine Parallelverschiebung s. durch eine Stellen Sie eine Gleichung für s auf, aus der ihre Abhängigkeit von der Dicke d der Platte, von der Brechzahl und vom Einfallswinkel ersichtlich ist. Wie dick muß eine Platte aus Kronglas ($n = 1{,}51$) sein, damit bei $\alpha = 45°$ eine Verschiebung $s = 1$ cm entsteht?

gegeben:

$n = 1{,}51$	: Brechzahl von Kronglas
$\alpha = 45°$	: Einfallswinkel des Lichts
$s = 1$ cm	: Verschiebung des Lichtstrahls

gesucht: d

allgemeine Lösung:
Der Übergang in die planparallele Platte ruft eine erstmalige Brechung

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \iff \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \iff \beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n}$$

der, unter dem Winkel α, zum Lot durch A, einfallenden Lichtstrahlen hervor. Der, mit dem Winkel β zum Lot durch B, laufende Lichtstrahl wird beim Austritt aus der Platte erneut gebrochen und ist hernach parallel aber versetzt zu dem bei A eintreffenden Strahl. In der Skizze kann man ein rechtwinkliges Dreieck mit $|AB|$ als Hypothenuse und s als Gegenkathete zum Winkel $\alpha - \beta$, einzeichnen. Die trigonometrische Beziehung $\sin(\alpha - \beta) = \frac{s}{|AB|} \iff s = |AB| \cdot \sin(\alpha - \beta)$ führt zur gesuchten Verschiebung s.

Die Strecke $|AB|$ ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck, daß das Lot durch A (Plattendicke d) mit dem erstmalig gebrochenen Strahl $|AB|$ bildet $\cos\beta = \frac{d}{|AB|} \iff |AB| = \frac{d}{\cos\beta}$. Einsetzen dieser Gleichung, in die zuvor hergeleitete Beziehung für s, ergibt, unter Verwendung eines Additionstheorems,

$$\begin{aligned} s &= \frac{d}{\cos\beta}\cdot\sin(\alpha-\beta) \;\wedge\; \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ &= \frac{d\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta)}{\cos\beta}. \end{aligned}$$

Im folgenden Text wird häufiger

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \underset{\alpha\in[0°/90°[}{\iff} \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

verwendet. Da der Cosinus über $I = [0°/90°[$ stets größer Null ist, muß nicht mit Beträgen gearbeitet werden. Das Intervall I ergibt sich aus der Überlegung, das der Einfallswinkel immer kleiner $90°$ ist.
Für den Winkel β ist noch die bereits hergeleitete Gleichung einzusetzen und nach umfangreichen Umformungen folgt die Formel für den Versatz s

$$\begin{aligned} & s = \frac{d\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta)}{\cos\beta} \;\wedge\; \beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n} \\ \iff & s = \frac{d\cdot\left(\sin\alpha\cdot\cos\arcsin\frac{\sin\alpha}{n} - \cos\alpha\cdot\sin\arcsin\frac{\sin\alpha}{n}\right)}{\cos\arcsin\frac{\sin\alpha}{n}} \;\wedge\; \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \\ \iff & s = \frac{d\cdot\left(\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} - \cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{n}\right)}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} \;\wedge\; \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \\ \iff & s = d\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} - \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{n}}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} \\ \iff & s = d\cdot\sin\alpha\cdot\left(1-\frac{\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}\right) \\ \iff & s = d\cdot\sin\alpha\cdot\left(1-\sqrt{\frac{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2}}{\frac{n^2-\sin^2\alpha}{n^2}}}\right) \\ \iff & s = d\cdot\sin\alpha\cdot\left(1-\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2-\sin^2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Die allgemeine Gleichung ist nun hergeleitet. In der Aufgabe war nach der Dicke der planparallelen Platte gefragt, bei vorgegebener Verschiebung, Brechzahl und Einfallswinkel. Es muß also die oben hergeleitete Gleichung nach d aufgelöst werden

$$s = d\cdot\sin\alpha\cdot\left(1-\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2-\sin^2\alpha}}\right) \iff d = \frac{s}{\sin\alpha\cdot\left(1-\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2-\sin^2\alpha}}\right)}.$$

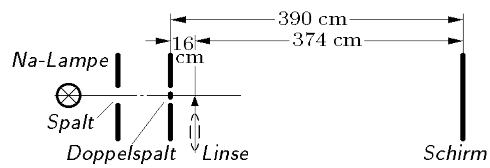
spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{1\ \mathrm{cm}}{\sin 45° \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1-\sin^2 45°}{1{,}51^2-\sin^2 45°}}\right)} \\
&= 3{,}00\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Die Verschiebung s wird durch eine 3 cm dicke planparallele Kronglasplatte bewirkt, auf die das Licht im Winkel von 45° einfällt.

15 Wellenoptik

A15/1 [2]: Das Licht einer Natriumdampflampe fällt durch einen schmalen Spalt und trifft danach auf einen zu diesem Spalt parallelen Doppelspalt. Auf einem Schirm, der vom Doppelspalt die Entfernung $e = 390$ cm hat, erhält man neben dem hellen Mittelstreifen abwechselnd dunkle und helle Linien. Die erste Linie hat vom Mittelstreifen einen Abstand von 5,5 mm. Zur Messung der Spaltbreite führt man zwischen Doppelspalt und Schirm eine Linse ein und erhält bei $g = 16$ cm und $b = 374$ cm auf dem Schirm ein Bild des Doppelspaltes mit 9,8 mm Abstand der beiden Spaltöffnungen. Welche Wellenlänge hat das verwendete Licht?



gegeben:

$e = 390 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} = 3900 \text{ mm}$	: Entfernung vom Doppelspalt
$B = 9{,}8$ mm	: Größe des Doppelspaltbildes
$a_n = 5{,}5$ mm	: Entfernung des n-ten Maximums
$g = 16$ cm	: Gegenstandsweite zur Linse
$b = 374$ cm	: Bildweite zur Linse
$n = 1$	: Betrachtetes Maximums

gesucht: λ

allgemeine Lösung:

Das beobachtete Phänomen entsteht durch Interferenz der am Doppelspalt entstehenden Elementarwellen. Die Spaltbreite d berechnet man mittels des Abbildungsmaßstabes $A = \frac{b}{g} = \frac{B}{G} \iff G = B \cdot \frac{g}{b}$, wobei $d = G$ ist. Der Winkel der Ablenkung des ersten Maximums muß klein sein, um mit der Gleichung für die Wellenlänge in Abhängigkeit von der Entfernung eines Maximums vom Mittelstreifen arbeiten zu können $\tan\alpha = \frac{a_n}{e} \iff \alpha = \arctan\frac{a_n}{e}$. Nach der Gleichung $\lambda = \frac{a_n \cdot d}{n \cdot e}$ berechnet man die Wellenlänge, indem die hergeleitete Beziehung für die Spaltbreite eingesetzt wird

$$\lambda = \frac{a_n \cdot d}{n \cdot e} \wedge d = B \cdot \frac{g}{b} \iff \lambda = \frac{a_n \cdot B \cdot g}{n \cdot e \cdot b}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} d &= 9{,}8\ \text{mm} \cdot \frac{16\ \text{cm}}{374\ \text{cm}} \\ &= 0{,}419\ \text{mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\frac{5{,}5\ \text{mm}}{3900\ \text{mm}} \\ &= 0{,}0808^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{5{,}5\ \text{mm} \cdot 0{,}98\ \text{cm} \cdot 16\ \text{cm}}{1 \cdot 390\ \text{cm} \cdot 374\ \text{cm}} \\ &= 5{,}91 \cdot 10^{-4}\ \text{mm} \cdot \frac{10^9\ \text{nm} \cdot 1\ \text{m}}{1\ \text{m} \cdot 1000\ \text{mm}} \\ &= 591\ \text{nm} \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen den Doppelspalten beträgt 0,419 mm. Die Ablenkung ist Minimal 0,0808°, so daß die Näherung in der Lichtwellenlängengleichung verwendet werden kann. Das Licht einer Natriumdampflampe hat eine Wellenlänge von 591 nm.

A15/2 [2]: Ein Gitter hat 540 Linien auf je 1 mm Breite. Durchstrahlt man es mit dem Licht aus dem engen Spalt einer Quecksilberdampflampe und vereinigt die Strahlen mit einer Linse auf einen 2,1 m entfernten Schirm, so liegen seitlich vom weißen Spaltbild in 51 cm Entfernung ein blaues, in 64,8 cm ein grünes und in 69,0 cm Entfernung ein gelbes Spaltbild. Berechnen Sie die Wellenlängen der drei hellsten Quecksilberlinien.

gegeben:

$e = 2{,}1\ \text{m} \cdot \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = 210\ \text{cm}$	: Entfernung Gitter–Schirm
$n_\text{G} = 540$	: Anzahl Linien des Gitters
$b_\text{G} = 1\ \text{mm}$	: Breite des Gitters
$a_{n,\text{b}} = 51\ \text{cm}$	: Entfernung des blauen Spaltbildes
$a_{n,\text{g}} = 64{,}8\ \text{cm}$	: Entfernung des grünen Spaltbildes
$a_{n,\text{y}} = 69{,}0\ \text{cm}$	: Entfernung des gelben Spaltbildes
$n = 1$	: Nummer des Maximums

gesucht: λ_b, λ_g, λ_y

allgemeine Lösung:

Das beobachtete Phänomen entsteht durch Interferenz der am Doppelspalt entstehenden Elementarwellen. Die Gitterkonstante ist $g = \frac{b_\mathrm{G}}{n_\mathrm{G}}$. Der Winkel der Ablenkung des ersten Maximums muß klein sein, um mit der Gleichung für die Wellenlänge in Abhängigkeit von der Entfernung eines Maximums vom Mittelstreifen arbeiten zu können $\tan\alpha_i = \frac{a_{n,i}}{e} \iff \alpha_i = \arctan\frac{a_{n,i}}{e}$, mit $i \in \{\mathrm{b};\mathrm{g};\mathrm{y}\}$, sonst muß man, wie in diesem Fall, die exakte Gleichung verwenden. Nach der Formel

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{a_{n,i}\cdot g}{n\cdot e}\cdot\cos\alpha_i \ \wedge\ \alpha_i = \arctan\frac{a_{n,i}}{e} \ \wedge\ g = \frac{b_\mathrm{G}}{n_\mathrm{G}} \\ \iff \lambda_i &= \frac{a_{n,i}\cdot b\subset G}{n\cdot e\cdot n\subset G}\cdot\cos\arctan\frac{a_{n,i}}{e} \end{aligned}$$

berechnet man die Wellenlänge der Quecksilberlinien.

spezielle Lösung:

$\alpha_i = \arctan\frac{a_{n,i}}{210\ \mathrm{cm}}$

$\lambda_i = \frac{a_{n,i}\cdot 1\ \mathrm{mm}}{1\cdot 2{,}1\ \mathrm{m}\cdot 540}\cdot\cos\arctan\frac{a_{n,i}}{210\ \mathrm{cm}}$

Ablenkung α_i	13,65°	17,15°	18,19°
Wellenlänge λ_i	437 nm	546 nm	578 nm

A15/3 [6]: a) Wie viele Lichtwellenlängen des Na-Lichtes liegen innerhalb eines Mikroskop-Deckglases der Dicke $d = 0{,}16$ mm, wenn das Licht senkrecht auf das Deckglas fällt? Die Brechzahl des Glases ist $n_\mathrm{Gl} = 1{,}5$; die Wellenlänge Na-Lichtes in Luft ist $\lambda_\mathrm{Luft} = 5{,}9\cdot 10^{-7}$ m. b) Welche Dicke d_Luft müßte eine Luftschicht haben, welche die gleiche Anzahl von Wellenlängen des Na-Lichtes enthält? Die Brechzahl von Luft ist $n_\mathrm{Luft} = 1{,}0$.

gegeben:

$\lambda_\mathrm{Luft} = 5{,}9\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}\cdot\frac{1000\ \mathrm{mm}}{1\ \mathrm{m}} = 5{,}9\cdot 10^{-4}\ \mathrm{mm}$	: Na-Wellenlänge
$d = 0{,}16$ mm	: Dicke des Glases
$n_\mathrm{Gl} = 1{,}5$	: seine Brechzahl
$n_\mathrm{Luft} = 1{,}0$	: Brechzahl von Luft

gesucht: N, d_{Luft}

allgemeine Lösung:

a) Für den Brechungsindex gilt folgende Beziehung $\frac{n_{\text{Gl}}}{n_{\text{Luft}}} = \frac{c_{\text{Luft}}}{c_{\text{Gl}}}$, außerdem noch $c_i = \lambda_i \cdot f$ mit $i \in \{\text{Luft}, \text{Gl}\}$. Da die Frequenz der Lichtwellen, im Gegensatz zu der Wellenlänge, in jedem Medium gleich ist, gilt $\frac{n_{\text{Gl}}}{n_{\text{Luft}}} = \frac{\lambda_{\text{Luft}} \cdot f}{\lambda_{\text{Gl}} \cdot f} \iff \lambda_{\text{Gl}} = \lambda_{\text{Luft}} \cdot \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Gl}}}$. Die Anzahl der in dem Deckglas liegenden Wellenlängen ergibt die Division der Glasdicke d durch die Wellenlänge des Natriumlichtes in Glas, da das Licht senkrecht einfällt

$$N = \frac{d}{\lambda_{\text{Gl}}} \wedge \lambda_{\text{Gl}} = \lambda_{\text{Luft}} \cdot \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Gl}}} \iff N = \frac{d \cdot n_{\text{Gl}}}{\lambda_{\text{Luft}} \cdot n_{\text{Luft}}}.$$

b) Im Gegensatz zu a) sind die Anzahl Wellenlängen im Deckglas N und die Wellenlänge für Luft λ_{Luft} bekannt, so daß sich die Dicke der Luftschicht zu $\lambda_{\text{Luft}} = \frac{d_{\text{Luft}}}{N} \iff d_{\text{Luft}} = N \cdot \lambda \subset Luft$ ergibt, da ja das N-fache der bekannten Wellenlänge die Dicke der Luftschicht ergibt, die von genauso vielen Wellenlängen durchsetzt wird, wie das Deckglas von a). Einsetzen der Beziehung für N aus a) führt zu

$$d_{\text{Luft}} = N \cdot \lambda_{\text{Luft}} \wedge N = \frac{d \cdot n_{\text{Gl}}}{\lambda_{\text{Luft}} \cdot n_{\text{Luft}}} \iff d_{\text{Luft}} = d \cdot \frac{n_{\text{Gl}}}{n_{\text{Luft}}}.$$

spezielle Lösung:

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} N &= 0{,}16\ \text{mm} \cdot \frac{1{,}5}{1{,}0 \cdot 5{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{mm}} \\ &= 407 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} d_{\text{Luft}} &= 0{,}16\ \text{mm} \cdot \frac{1{,}5}{1{,}0} \\ &= 0{,}240\ \text{mm} \end{aligned}$$

Im Deckglas liegen 407 Wellenlängen des Natriumlichtes. Die gleiche Anzahl Wellenlängen nehmen in Luft 0,240 mm in Anspruch.

A15/4 [6]: Mit Hilfe einer Na-Lichtquelle $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m und eines Doppelspaltes werden auf einen Schirm, der vom Doppelspalt $e = 3{,}39$ m entfernt ist, Interferenzstreifen erzeugt. Für die hellen Streifen wird der Streifenabstand $\Delta a_n = 2$ mm gemessen. Wie groß ist der Abstand d der beiden Spalte des Doppelspaltes?

gegeben:

$\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m	: Wellenlänge einer Na-Lichtquelle
$e = 3{,}39$ m	: Abstand Schirm–Doppelspalt
$\Delta a_n = 2\ \text{mm} \cdot \frac{1\ \text{m}}{1000\ \text{mm}} = 0{,}002$ m	: Abstand zwischen den Streifen

gesucht: d

allgemeine Lösung:

Alle benötigten Meßwerte für die Gleichung $\lambda = \frac{\Delta a_n \cdot d}{n \cdot e}$ sind gegeben. Da der Abstand zweier Interferenzstreifen angegeben wurde gilt

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1} \underset{a_0 = 0\ \text{m}}{\Longrightarrow} \Delta a_n = a_1 - a_0 = a_1 \Longrightarrow n = 1.$$

Der Ablenkungswinkel muß klein sein um die oben angeführte Näherung verwenden zu können. Rein qualitativ ist er das auch, da die Länge der Gegenkathete Δa_n im Vergleich zu der der Ankathete sehr klein ist, die Lichtwellen, die im Punkt a_1 zu einem Maximum interferieren nur minimal von der horizontalen abweichen. Rechnerisch ist der Winkel zu bestimmen $\tan\alpha = \frac{\Delta a_n}{e} \iff \alpha = \arctan\frac{\Delta a_n}{e}$. Auflösen der oben genannten Beziehung führt zu der gesuchten Spaltbreite

$$\lambda = \frac{\Delta a_n \cdot d}{1 \cdot e} \iff d = \lambda \cdot \frac{e}{\Delta a_n}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arctan\frac{0{,}002\ \text{m}}{3{,}39\ \text{m}} \\
&= 0{,}034^\circ \cdot \frac{60'}{1^\circ} \\
&= 2' + 0{,}04' \cdot \frac{60''}{1'} \\
&= 2'\ 2{,}4''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= 5{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \cdot \frac{3{,}39\ \text{m}}{0{,}002\ \text{m}} \\
&= 0{,}001\ \text{m} \cdot \frac{1000\ \text{mm}}{1\ \text{m}} \\
&= 1{,}00\ \text{mm}
\end{aligned}$$

Die Auslenkung von der Horizontalen beträgt $2'\ 2{,}4''$. Die Breite des Doppelspaltes beträgt 1,00 mm.

A15/5 [6]: Das kontinuierliche Spektrum 1. Ordnung des sichtbaren Glühlichtes einer Kohlebogenlampe erstreckt sich über den Wellenlängenbereich von $\lambda_{\text{viol}} = 3{,}9 \cdot 10^{-7}$ m bis $\lambda_{\text{rot}} = 7{,}8 \cdot 10^{-7}$ m. Das Spektrum soll mit Hilfe eines optischen Strichgitters der Gitterkonstanten $g = 0{,}01$ mm hergestellt werden. Welchen Abstand e muß der Schirm vom Gitter haben, damit das Spektrum 12 cm breit ist?

gegeben:

$g = 0{,}01\text{ mm} \cdot \frac{1\text{ m}}{1000\text{ mm}} = 10^{-5}\text{ m}$	: Gitterkonstante
$\Delta a_n = 12\text{ cm} \cdot \frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}} = 0{,}12\text{ m}$	: Spektrumbreite
$\lambda_{\text{viol}} = 3{,}9 \cdot 10^{-7}\text{ m}$	: Wellenlänge des violetten Lichtes
$\lambda_{\text{rot}} = 7{,}8 \cdot 10^{-7}\text{ m}$	: Wellenlänge des roten Lichtes
$n = 1$	: Zu untersuchendes Spektrum

gesucht: e

allgemeine Lösung:

Um die Breite eines Spektrums zu bestimmen, muß man in die Gleichung $\lambda_i = \frac{a_{n,i} \cdot g}{n \cdot e}$, mit $i \in \{\text{viol}; \text{rot}\}$, nacheinander die Wellenlängen für die beiden äußersten sichtbaren Linien eingesetzt werden und nachher die beiden Abstände von der Mitte voneinander subtrahiert werden, also

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{viol}} - \lambda_{\text{rot}} &= \frac{a_{n,\text{viol}} \cdot g}{n \cdot e} - \frac{a_{n,\text{rot}} \cdot g}{n \cdot e} \\ \Longleftrightarrow e &= \frac{g \cdot (a_{n,\text{viol}} - a_{n,\text{rot}})}{n \cdot (\lambda_{\text{viol}} - \lambda_{\text{rot}})} \\ \Longleftrightarrow e &= \frac{g \cdot \Delta a_n}{n \cdot \Delta\lambda}. \end{aligned}$$

Die Gleichung ist bereits nach e aufgelöst, g und die Breite des Spektrums Δa_n sind gegeben, n ist eins, da nach dem Spektrum 1. Ordnung gefragt ist.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} e &= \frac{10^{-5}\text{ m} \cdot 0{,}12\text{ m}}{1 \cdot (7{,}8 - 3{,}9) \cdot 10^{-7}} \\ &= 3{,}0\text{ m} \end{aligned}$$

Die Entfernung zwischen Schirm und Gitter muß 3 m betragen.

A15/6 [6]: Sichtbares Licht im Wellenlängenbereich von $\lambda_{\text{viol}} = 4{,}0 \cdot 10^{-7}$ m bis $\lambda_{\text{rot}} = 7{,}2 \cdot 10^{-7}$ m fällt senkrecht auf ein optisches Strichgitter. Zeigen Sie, daß sich die Spektren 2. und 3. Ordnung teilweise überdecken, die Spektren 1. und 2. Ordnung dagegen voneinander getrennt sind!

gegeben:

$\lambda_{\text{viol}} = 4{,}0 \cdot 10^{-7}$ m	: Wellenlänge des violetten Lichtes
$\lambda_{\text{rot}} = 7{,}2 \cdot 10^{-7}$ m	: Wellenlänge des roten Lichtes

gesucht: Beziehung für n

allgemeine Lösung:

Da die Gitterkonstante und der Abstand vom Schirm nicht gegeben ist handelt es sich um eine allgemeine Aufgabe für beliebige g und e. Um zu zeigen, daß zwei aufeinanderfolgende Spektren voneinander getrennt oder überlappend sind, ist a_n für die am weitesten außen liegende Wellenlänge und a_{n+1} für die am weitesten innen liegende Wellenlänge des folgenden Spektrums zu berechnen $\lambda_i = \frac{a_{n_i} \cdot g}{n_i \cdot e} \iff a_{n_i} = \frac{\lambda_i \cdot g}{n_i \cdot e}$, mit $i \in \{\text{viol}; \text{rot}\}$. Am weitesten außen liegt *Rot*, am weitesten innen liegt *Violett*, also gilt die Ungleichung, mit $n_{\text{rot}} = n$ und $n_{\text{viol}} = n + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{\text{rot}} \cdot g}{n \cdot e} < \frac{\lambda_{\text{viol}} \cdot g}{(n+1) \cdot e} \\ \iff & \lambda_{\text{rot}} \cdot n < \lambda_{\text{viol}} \cdot (n+1) \\ \iff & \frac{\lambda_{\text{rot}}}{\lambda_{\text{viol}}} < \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Wenn die Ungleichung war ist, so sind die aufeinanderfolgenden Spektren voneinander getrennt, ansonsten überlappen sie sich.

spezielle Lösung:

$$\frac{7{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{4{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = \frac{7{,}2}{4{,}0} = \frac{9}{5} < \frac{1+1}{1} = 2_{\ (w)}$$

$$\frac{7{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{4{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = \frac{7{,}2}{4{,}0} = \frac{9}{5} < \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}_{\ (f)}$$

Bei den Spektren 1. und 2. Ordnung ist die Ungleichung erfüllt, sie sind getrennt, beim 2. und 3. ist dies nicht der Fall, sie sind nicht voneinander getrennt.

16 Ladungen

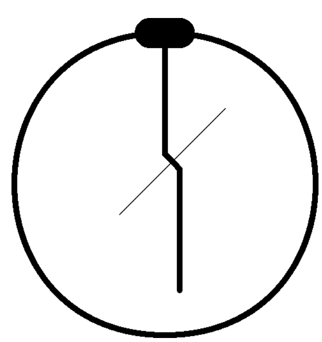
A16/1 [5]: Wie kann man bei einem elektrisch geladenen Körper feststellen, ob seine Ladung positiv oder negativ ist?

allgemeine Lösung:

Man bringt die Ladungen von dem Körper auf ein beispielsweise positives, halbgeladenes Elektroskop auf. Vermindert sich der Ausschlag, so war der Körper entgegengesetzt dem Elektroskop geladen, hier negativ. Eine Vergrößerung des Ausschlages zeigt eine gleichnamige Ladung des Körpers an, hier positiv.

A16/2 [5]: Beschreiben Sie die Wirkungsweise eines Elektroskops.

Skizze:



allgemeine Lösung:

Die auf ein Elektroskop aufgebrachten Ladungen verteilen sich gleichmäßig auf dessen Außenfläche. Der Zeiger ist leitend mit dem Rest des Gerätes verbunden. Deshalb werden Zeiger und Halterung gleichnamig aufgeladen. Da sich gleichnamige Ladungen abstoßen tritt ein Zeigerausschlag auf.

A16/3 [5]: Welche Ladung ist durch den Leiterquerschnitt geflossen, wenn eine Stromstärke $I = 1{,}8$ mA eine Zeit 5 min 12 s lang gemessen wird?

gegeben:

$$I = 1{,}8\ \mathrm{mA} \cdot \frac{1\ \mathrm{A}}{1000\ \mathrm{mA}} = 0{,}0018\ \mathrm{A} \qquad : \text{Stromstärke}$$
$$t = 5\ \mathrm{min}\ \ 12\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{min} \cdot \frac{60\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{min}} + 12\ \mathrm{s} = 312\ \mathrm{s} \qquad : \text{Zeit}$$

gesucht: Q

allgemeine Lösung:

Da die Zeit und die Stromstärke, die das Intervall über konstant ist, bekannt sind, wende ich die Definitionsgleichung für die Ladung an $Q = I \cdot t$ und setze die bekannten Größen ein.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= 0{,}0018\ \mathrm{A} \cdot 312\ \mathrm{s} \\ &= 0{,}56\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

Es fließt in 5 min 12 s die Ladungsmenge 0,56 C.

A16/4 [5]: Durch einen Leiterquerschnitt fließen in 20 s eine Ladungsmenge von 5,6 C. Wie groß ist die Stromstärke?

gegeben:

$$Q = 5{,}6\ \mathrm{C} \qquad : \text{Ladungsmenge}$$

$t = 20\ \mathrm{s}$: Zeit

gesucht: I

allgemeine Lösung:
Die Stromstärke ergibt sich durch auflösen der Definitionsgleichung der Ladung $Q = I \cdot t \iff I = \frac{Q}{t}$.

spezielle Lösung:

$$I = \frac{5{,}6\ \mathrm{A}\, s}{20\ \mathrm{s}} = 0{,}28\ \mathrm{A}$$

Die 20 s über fließt ein Strom von 0,28 A.

A16/5 [5]: Eine Autobatterie kann Ladung von 88 A h abgeben. Wie lange kann man ihr einen Strom von 0,5 A entnehmen?

gegeben:

$Q = 88\ \mathrm{A\,h} \cdot \frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{h}} = 316800\ \mathrm{C}$: Ladung einer Autobatterie
$I = 0{,}5\ \mathrm{A}$: abfließender Strom

gesucht: t

allgemeine Lösung:
Die Zeit ergibt sich durch auflösen der Definitionsgleichung der Ladung $Q = I \cdot t \iff t = \frac{Q}{I}$.

spezielle Lösung:

$$t = \frac{316800\ \mathrm{C}}{0{,}5\ \mathrm{A}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 633600\ \mathrm{s} \cdot \frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}} \\
&= 176\ \mathrm{h} \\
&= 7\ \mathrm{d}\ \ 20\ \mathrm{h}
\end{aligned}
$$

Der Batterie kann 7 d 20 h ein Strom von 0,5 A entnommen werden.

A16/6 [5]: Zehn kleine geladene Körper sind gleichmäßig auf einem Kreis mit dem Radius 80 cm verteilt. Jeder Körper besitzt eine Ladung von $9 \cdot 10^{-8}$ C. Wie groß ist die Stromstärke auf dem Kreisbogen, wenn der Kreis mit 1200 Umdrehungen pro Minute rotiert?

gegeben:

$Q_t = 9 \cdot 10^{-8}$ C	: eine Ladung auf dem Kreisbogen
$t = 1\ \mathrm{min} \cdot \frac{60\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{min}} = 60\ \mathrm{s}$	: Zeit während der der Kreisboden rotiert
$r = 80\ \mathrm{cm} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}} = 0{,}8\ \mathrm{m}$	: Radius des Kreises
$n = 1200$	: Anzahl Umdrehungen pro Minute

gesucht: I

allgemeine Lösung:

Unter Strom versteht man die Bewegung von Ladungen. Ich mache zuerst aus den neun kleinen Ladungen ein große $Q = 9 \cdot Q_\mathrm{t}$, da ja bei einer Umdrehung alle neune bewegt werden. Die Anzahl Umdrehungen pro Sekunde ist die Frequenz $f = \frac{n}{t}$. Die Ladungsmenge, die jede Sekunde fließt, ist die Ladungsmenge Q multipliziert mit der Anzahl Umdrehungen pro Sekunde $I = Q \cdot f = 9 \cdot n \cdot \frac{Q_t}{t}$.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
I &= 1200 \cdot \frac{9 \cdot 9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{A\,s}}{60\ \mathrm{s}} \\
&= 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A} \\
&= 16\ \mu\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Auf dem Kreisbogen beträgt die Stromstärke 16 μA.

A16/7 [5]: Gegeben ist folgende Zeit-Strom-Funktion $I(t) = 0{,}2 \cdot t^4 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}^4}$. Berechnen Sie die zwischen der zweiten und dritten Sekunde geflossene elektrische Ladung.

gegeben:

$I(t) = 0{,}2 \cdot t^4 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}^4}$	: Zeit-Strom-Funktion
$t_1 = 2$ s	: untere Grenze des betrachteten Zeitintervalls
$t_2 = 3$ s	: obere Grenze des betrachteten Zeitintervalls

gesucht: Q

allgemeine Lösung:

Es ist eine Zeit-Strom-Funktion gegeben, sie die Abhängigkeit zwischen Zeit und Strom beschreibt. Überdies sind noch Angaben über das betrachtete Intervall vorhanden. Laut Definition ist die geflossene Ladung das Integral der Zeit-Strom-Funktion über einem Zeit Intervall

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) \ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{25} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}^5} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{t_2^5 - t_1^5}{25} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}^5}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{243 - 32}{25} \\ &= 8{,}4 \text{ C} \end{aligned}$$

Zwischen der zweiten und dritten Sekunde fließen 8,4 C.

A16/8 [5]: Wie läßt sich im Zeit-Ladungs-Diagramm die Stromstärke zu einer bestimmten Zeit t ablesen?

allgemeine Lösung:

Die Stromstärke ist die erste Ableitung der Ladung nach der Zeit. Eine Ableitung ist aber nichts anderes, als eine Funktion für die Tangentensteigungen der differenzierten Funktion. Wenn man nun zum Zeitpunkt t die Stromstärke feststellen möchte, so muß man die Steigung der Tangente in diesem Punkt ermitteln.

A16/9 [9]: Der Tolmansche Versuch.

A. Mechanischer Modellversuch

Auf einem fahrbaren Tisch befindet sich eine Kugel, die auf ihm reibungsfrei rollen kann.

1. Beschreibung der Bewegung durch einen *außenstehenden Beobachter* $\mathfrak{A}$. Er steht auf der Erde, die für ihn ruht. In diesem seinem System wird der Tisch mit $|\vec{a}_1| = const.$ nach links beschleunigt (*fig. a*). Was sagt der $\mathfrak{A}$ zur Bewegung der Kugel?

2. Beschreibung der Bewegung durch einen *mitbewegten Beobachter* $\mathfrak{B}$. Er wird mit dem Tisch mitbeschleunigt (*fig. b*), der für ihn aber ruht.

   a) Wie beschreibt der $\mathfrak{B}$ die Bewegung der Kugel? Tragen Sie einen Pfeil für die Beschleunigung $\vec{a}_2$ im System des $\mathfrak{B}$ ein.

   b) Wie kann der $\mathfrak{B}$ die Beschleunigung in seinem System bestimmen?

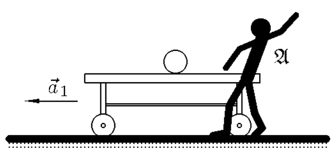


fig. a

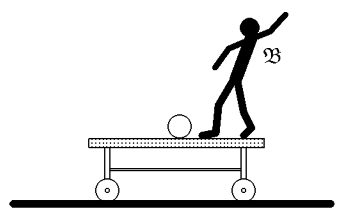


fig. b

B. Elektrischer Modellversuch

Ein Metallzylinder (Länge L) wird kurzzeitig ais einer gleichförmigen Bewegung nach rechts gestoppt. Dabei nimmt seine Geschwindigkeit gleichmäßig ab $\vec{a}_1 = const.$

3.a) Welche Teile des leitenden Zylinders entsprechen nach dem Elektronengasmodell dem Wagen beziehungsweise der Kugel in Teil A?

b) Wie wird die Bewegung eines Elektrons vom $\mathfrak{A}\,(a, v)$ beziehungsweise vom mit dem Zylinder mitbewegten $\mathfrak{B}\,(a', v')$ beschrieben?

4.a) Weshalb läßt die Beschleunigung der Elektronen relativ zum Zylinder allmählich nach?

b) Welcher Kräfteansatz gilt für ein Elektron im Gleichgewichtszustand?

c) Wie könnte man hieraus die spezifische Ladung $\frac{e}{m_e}$ ermitteln?

5. Errechnen Sie die elektrische Spannung, die bei diesem Versuch zwischen den Enden des Zylinders entsteht. Benutzen Sie dazu $L = 1{,}75$ m; $a' = 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

C. Das Experiment von Tolman und Stewart (1916)

Sie versetzen eine lange Spule (Windungszahl N, Radius r) aus Kupferdraht in schnelle Umdrehung um ihre Längsachse (Drehfrequenz f).

6. Drücken Sie die Umlaufgeschwindigkeit $v(f, r)$ eines Elektrons auf einer Windungsbahn aus. Welcher Term gilt für die Gesamtlänge $L(N, r)$ des Spulendrahtes?

7. Die Drehung der Spule wurde in der kurzen Zeitdauer t gestoppt. Wir nehmen eine konstante Verzögerung der Elektronen an $a = \frac{v}{t}$ (bisher a').

a) Setzen Sie die Terme für a, f und L in die Gleichung für $\frac{e}{m_e}$ aus 4.c) ein. Welche Größen müßten zur Bestimmung der spezifischen Ladung gemessen werden?

b) Anstatt des Spannungsstoßes $U \cdot t$ mißt man die kurzzeitig durch den Querschnitt des Drahtes geflossene Ladung Q. Formen Sie die Gleichung für $\frac{e}{m_e}$ entsprechend um.

c) Errechnen Sie $\frac{e}{m_e}$ aus den folgenden Meßwerten $r = 12$ cm; $N = 5000$; $f = 20$ Hz; Gesamtwiderstand $R = 500\ \Omega$; $Q = 6 \cdot 10^{-10}$ C.

gegeben:

$L = 1{,}75$ m	: Länge des Zylinders
$a' = 10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	: Beschleunigung des Zylinders
$N = 5000$	: Windungszahl der Spule
$f = 20$ Hz	: Rotationsfrequenz
$R = 500\ \Omega$	: Widerstand der Spule
$Q = 6 \cdot 10^{-10}$ C	: Geflossene Ladungsmenge
$r = 12 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0{,}12$ m	: Radius der Spule

gesucht: U_1, $\frac{e}{m_e}$

allgemeine Lösung:

1. Für den $\mathfrak{A}$ ist die Kugel in Ruhe, da sie auf dem Tisch reibungsfrei rollen kann und sich der Tisch so unter ihr, mit der Beschleunigung $\vec{a}_1$, nach links wegbewegt.

2.a) Für den $\mathfrak{B}$ ist die Kugel nicht in Ruhe, sondern bewegt sich mit $s = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$ und $v = a_2 \cdot t$ auf ihn zu. Die Beschleunigungen von 1. und 2. folgen der Beziehung $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$. Der Vektor $\vec{a}_2$ weist somit nach rechts.

b) Die Beschleunigung des Bezugsystems von $\mathfrak{B}$ ist $\vec{a}_1$ und betraglich, der *scheinbaren* Beschleunigung der Kugel, gleich. Die Beschleunigung a_2 kann durch Zeit-Weg-Messung nach $s = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \iff a_2 = \frac{2 \cdot s}{t^2}$ oder durch Kraftmessungen mittels des 1. Newtonschen Axioms $F = m \cdot a_2 \iff a_2 = \frac{F}{m}$ bestimmt werden.

3.a) Die quasifreien Elektronen entsprechen der reibungsfrei rollenden Kugel bei A. Der fahrbare Tisch entspricht dem, aus Gitterionen bestehenden, Metallzylinder.

b) Die Beschreibung erfolgt analog zu A, wobei zu beachten ist, das die Bewegung aus der Sicht des $\mathfrak{A}$ nach links, also umgekehrt wie bei A, erfolgt.

4.a) Durch die Beschleunigung der Elektronen nach links baut sich ein elektrisches Feld auf, dessen Kraftwirkung der Trägheitskraft entgegengesetzt ist.

b) Sind die, zueinander entgegengesetzt gerichteten, Vektoren der elektrischen- und der Trägheitskraft betraglich gleich, so werden keine Elektronen mehr verschoben, es liegt an den Enden des Metallzylinders eine konstante Spannung. Die elektrische Kraft beträgt $F_{\mathrm{el}} = e \cdot E$ und die Trägheitskraft $F = m_{\mathrm{e}} \cdot a'$. Mit $U_1 = E \cdot L \iff E = \frac{U_1}{L}$ erhält man

$$e \cdot \frac{U_1}{L} = m_{\mathrm{e}} \cdot a' \iff U_1 = \frac{m_{\mathrm{e}} \cdot a' \cdot L}{e}.$$

c) Durch Umformen der Beziehung von 4.b) nach $\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}$ erhält man

$$e \cdot \frac{U_1}{L} = m_{\mathrm{e}} \cdot a' \iff \frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{a' \cdot L}{U_1}.$$

Durch das Messen der Spannung an den Enden des Metallzylinders erhält man die spezifische Ladung.

5. Einsetzen der gegebenen Größen in die Gleichung von 4.b) ergibt die gesuchte Spannung U_1.

6. Für die Rotationsgeschwindigkeit eines Elektrons in einer Schleife der Spule, mit dem Abstand r von der Längsachse, gilt

$$v = \Omega \cdot r \ \wedge \ \Omega = 2\pi f \iff v(f,r) = 2\pi f r.$$

Die Länge L des Spulendrahtes errechnet sich aus der Länge einer Windung, daß heißt dem Umfang der Spule, $L_{\mathrm{w}} = 2\pi r$ und der Anzahl der Windungen zu

$$L(N,r) = 2\pi N r.$$

7.a) Einsetzen der Beziehungen in die Gleichung von 4.c) ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{a \cdot L}{U_2} \ \wedge \ a = \frac{v}{t} \ \wedge \ L = 2\pi N r \\ \iff & \frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{2\pi N \cdot r \cdot v}{U_2 \cdot t} \ \wedge \ v = 2\pi f r \\ \iff & \frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{4\pi^2 N \cdot f \cdot r^2}{U_2 \cdot t}. \end{aligned}$$

Die Größen N, f, r, U_2 und t müssen gemessen werden.

b) Mit dem Ohmschen Gesetz $U_2 = R \cdot I$, wobei $Q = I \cdot t$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{4\pi^2 N \cdot f \cdot r^2 \cdot t}{R \cdot Q \cdot t} \\ \iff & \frac{e}{m_{\mathrm{e}}} = \frac{4\pi^2 N \cdot f \cdot r^2}{R \cdot Q}. \end{aligned}$$

c) Einsetzen der gegebenen Größen ergibt die spezifische Masse.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
5.\quad U_1 &= \frac{1{,}75\ \mathrm{m}\cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}75\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}}\\
&= 10^{-7}\ \mathrm{V}\cdot\frac{10^9\ \mathrm{nV}}{1\ \mathrm{V}}\\
&= 100\ \mathrm{nV}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7.\mathrm{c})\quad \frac{e}{m_\mathrm{e}} &= \frac{4\pi^2\,5000\cdot 20\ \mathrm{Hz}\cdot 0{,}12^2\ \mathrm{m}^2}{500\ \Omega\cdot 6\cdot 10^{-10}\ \mathrm{C}}\\
&= 1{,}90\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\cdot\frac{1\ \mathrm{TC}}{10^{12}\ \mathrm{C}}\\
&= 0{,}190\ \frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{kg}}
\end{aligned}
$$

Zwischen den beiden Zylinderenden wird eine Spannung von 100 nV geschaffen. Die spezifische Ladung des Elektrons beträgt 0,190 $\frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{kg}}$.

17 Das elektrische Feld

<u>**A17/1 [5]:**</u> Berechnen Sie die elektrische Feldstärke an einem Ort, in dem auf einem Körper mit der Ladung $Q = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ C die Kraft $F = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$ N wirkt.

gegeben:

$Q = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$: Ladung in einem Punkt
$F = 3{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$: Kraftwirkung auf diese Ladung

gesucht: E

allgemeine Lösung:
Die Feldstärke in einem Punkt ist als der Quotient aus wirkender Kraft auf die, im elektrischen Feld befindliche, Ladung definiert $E = \frac{F}{Q}$.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}}{2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}} \\ &= 1400\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke an dem Ort beträgt 1400 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

<u>**A17/2 [5]:**</u> Berechnen Sie die Kraft, die ein Körper mit der Ladung $Q = 78$ nC in einem Feldpunkt mit der Feldstärke $E = 8{,}1 \cdot 10^{5}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ erfährt.

gegeben:

$Q = 7{,}8 \cdot 10^{-8}$ C : Ladung in einem Feldpunkt
$E = 8{,}1 \cdot 10^{5}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$: Feldstärke in diesem Punkt

gesucht: F

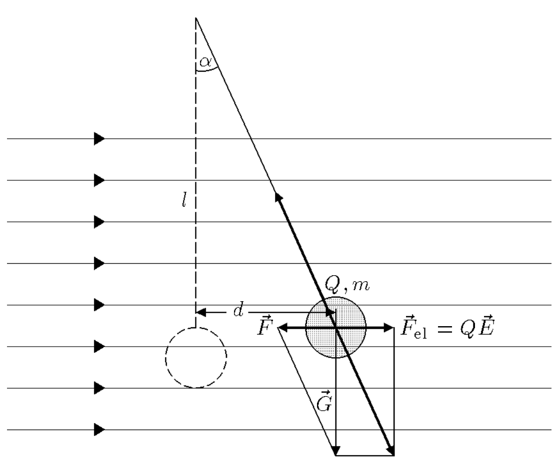
allgemeine Lösung:
Die Feldstärke in einem Punkt ist der Quotient aus wirkender Kraft auf die im elektrischen Feld befindliche Ladung; Feldstärke und Ladungsmenge sind für einen Ort gegeben, deshalb kann die Definitionsgleichung für die elektrische Feldstärke einfach nach der Kraft aufgelöst werden $E = \frac{F}{Q} \iff F = Q \cdot E$.

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} F &= 8{,}1 \cdot 10^{5}\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{C} \\ &= 63\ \text{mN} \end{aligned}$$

Auf die, im Feld befindliche, Ladungsmenge wirkt eine Kraft von 63 mN.

<u>A17/3 [5]:</u> Die Kugel in der Skizze sei mit der Ladung $Q = 5{,}2 \cdot 10^{-8}$ C geladen und habe die Masse $m = 0{,}40$ g. Sie hänge an einem $l = 1{,}80$ m langen Faden. In dem homogenen elektrischen Feld wird sie um $d = 15$ mm ausgelenkt.



Wie groß ist die Feldstärke E des homogenen Feldes?

gegeben:

$Q = 5{,}2 \cdot 10^{-8}$ C	: Ladung der Kugel
$m = 0{,}40\ \text{g} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{kg}$	: Masse der Kugel
$l = 1{,}80$ m	: Länge der Aufhängung
$d = 15\ \text{mm} \cdot \frac{1\ \text{m}}{1000\ \text{mm}} = 0{,}015\ \text{m}$	: Auslenkung im elektrischen Feld

gesucht: E

allgemeine Lösung:

Die Ladung der Probekugel ist gegeben. Für die Berechnung der Feldstärke des homogenen Feldes muß nur noch die Kraft aus den gegebenen Größen berechnet werden. Die Gewichtskraft der Kugel beträgt $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$. Sie wird in zwei Komponenten zerlegt. Eine, die mit dem Faden gleichgerichtet ist und eine weitere, die entgegengesetzt zur elektrischen Kraft $\vec{F}_{\text{el}}$ gerichtet ist und senkrecht auf der Gewichtskraft steht. Die Vektoren $\vec{G}$ und $\vec{F}_{\text{el}}$ bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes. Der Winkel, der von der Kraft G und der Hypothenuse eingeschlossen wird, ist der gleiche, wie zwischen den Fäden der End- und der gestrichelt gezeichneter Ausgangsposition. Er berechnet sich wie folgend $\tan\alpha = \frac{d}{l}$. Für die Vektoren $\vec{G}$ und $\vec{F}_{\text{el}}$ gilt folgende trigonometrische Beziehung $\tan\alpha = \frac{F_{\text{el}}}{G} \wedge G = m \cdot g \iff F_{\text{el}} = m \cdot g \cdot \tan\alpha$. Durch Elimination des Tangens ergibt sich $F_{\text{el}} = m \cdot g \cdot \tan\alpha \wedge \tan\alpha = \frac{d}{l} \iff F_{\text{el}} = m \cdot g \cdot \frac{d}{l}$. Aus der, auf die Probekugel wirkenden, Kraft und deren Ladungsmenge kann man die Feldstärke durch Einsetzen in deren Definitionsgleichung ermitteln

$$E = \frac{F_{\text{el}}}{Q} = \frac{m \cdot g \cdot d}{Q \cdot l}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} E &= \frac{4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot 0{,}015\ \text{m}}{5{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{C}\,\text{s}^2 \cdot 1{,}80\ \text{m}} \\ &= 630\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke des homogenen Feldes beträgt $630\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

A17/4 [5]: Wie groß ist der Ausschlag d einer Probekugel der Masse $m = 0{,}25$ g, die an einem Faden der Länge $l = 1{,}5$ m in einem elektrischen Feld der Stärke $E = 5{,}6 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ hängt, wenn sie die Ladung $Q = 6{,}9 \cdot 10^{-8}$ C trägt.

gegeben:

$E = 5{,}6 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$	: elektrische Feldstärke
$Q = 6{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$	: Ladung der Probekugel
$l = 1{,}5\ \mathrm{m}$	: Länge der Aufhängung
$m = 0{,}25\ \mathrm{g} \cdot \frac{1\ \mathrm{kg}}{1000\ \mathrm{g}} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg}$	: Masse der Probekugel

gesucht: d

allgemeine Lösung:

Die auf die Kugel wirkende Kraft ergibt sich aus der Feldstärke und der Ladung der Kugel $E = \frac{F}{Q} \iff F = Q \cdot E$. Der Ausschlag d ergibt sich über die trigonometrische Beziehung $\tan\alpha = \frac{d}{l} \iff d = l \cdot \tan\alpha$. Der Winkel findet sich nicht nur im oberen Dreieck, sondern auch im Vektordreieck $\tan\alpha = \frac{F_{\mathrm{el}}}{G} \wedge G = m \cdot g \iff \tan\alpha = \frac{F_{\mathrm{el}}}{m \cdot g}$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} d = l \cdot \tan\alpha \ \wedge\ \tan\alpha &= \frac{F}{m \cdot g} \ \wedge\ F = Q \cdot E \\ \iff d &= \frac{l \cdot Q \cdot E}{m \cdot g}. \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1{,}5\ \mathrm{m} \cdot 6{,}9 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C\,s^2} \cdot 5{,}6 \cdot 10^2\ \mathrm{kg\,m}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^2\,C}} \\ &= 0{,}024\ \mathrm{m} \cdot \frac{1000\ \mathrm{mm}}{1\ \mathrm{m}} = 24\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

Die Probekugel wird um 24 mm aus ihrer Ruhelage ausgelenkt.

A17/5 [5]: Die Feldlinien eines Plattenkondensators verlaufen vertikal von unten nach oben. Ein in den Plattenraum eingebrachtes positiv geladenes Öltröpfchen, dessen Gewicht $G = 4{,}6 \cdot 10^{-9}$ N ist, schwebt gerade. Messungen ergaben eine Feldstärke $E = 7{,}2 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$. Berechnen Sie die Ladung des Öltröpfchens.

gegeben:

$$\begin{array}{ll} G = 4{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N} & : \text{Gewicht des Öltröpfchens} \\ E = 7{,}2 \cdot 10^{9}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} & : \text{elektrische Feldstärke} \end{array}$$

gesucht: Q

allgemeine Lösung:

Die Feldlinien verlaufen vertikal von unten nach oben. Deshalb ist die Gewichtskraft des Tröpfchens antiparallel zu der elektrischen Kraft. Beide Kräfte müssen gleich groß sein, damit sie sich aufheben $\vec{F}_{\mathrm{el}} = -\vec{G}$. Nun ist es nur noch nötig die gegebenen Größen in die Definitionsgleichung der elektrischen Feldstärke einzusetzen, die zuvor nach der Ladung aufgelöst wird

$$E = \frac{F_{\mathrm{el}}}{Q} \iff Q = \frac{F_{\mathrm{el}}}{E} \Longrightarrow Q = \frac{G}{E}.$$

spezielle Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}}{7{,}2 \cdot 10^{9}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}} \\ &= 6{,}4 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

$$\frac{6{,}4 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{e} = 4$$

Die Ladung des Öltröpfchens beträgt $6{,}4 \cdot 10^{-19}$ C. Die Versuchsanordnung entspricht der des Millikan Versuches. Das Verhältnis zwischen Ladung des Öltröpfchens und der Elementarladung ist klein und ganzzahlig. Millikan

A17/6 [5]: Gibt es im elektrostatischen Feld geschlossene Feldlinien? Begründen Sie Ihre Antwort.

allgemeine Lösung:

Da Feldlinien immer von positiven Ladungen zu negativen Ladungen verlaufen gibt es keine geschlossenen Linien. Bei einer Punktladung bilden sie für gewöhnlich ein Radialfeld. Ferner gilt $\oint E\, \mathrm{d}s = 0$, daß heißt, daß das elektrische Feld auf einem geschlossenen Umlauf keine Arbeit verrichtet. Gäbe es geschlossene Feldlinien (Wirbel), so könnte sich eine Ladung beliebig lang auf dieser Feldlinie bewegen und dabei beliebig viel Energie aufnehmen. Das *perpetuum Mobile* erster Art währe konstruiert. Geschlossene elektrische Feldlinien gibt es nur bei den elektromagnetischen Wellen.

Wirbel
perpetuum Mobile

18 Radialsymmetrisches Feld

A18/1 [5]: Zwei gleiche Ladungen stoßen sich im Abstand $d = 20$ cm mit einer Kraft $F = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ N ab. Wie groß sind die Ladungen?

gegeben:

$F = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ N	: Kraft zwischen den Ladungen
$d = 20 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0{,}2$ m	: Abstand der Ladungen voneinander

gesucht: Q

allgemeine Lösung:

Es handelt sich bei um zwei gleichnamige Punktladungen, die sich abstoßen. Für diese gilt das Coulombsche Gesetz $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$. Da $Q_1 = Q_2$ ergibt sich die Gleichung $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2}$, die nach der Ladung aufgelöst wird

$$
\begin{aligned}
& F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2} \\
\Longleftrightarrow\ & Q^2 = 4\pi\varepsilon_0 \cdot F \cdot r^2 \\
\Longleftrightarrow\ & |Q| = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 \cdot F \cdot r^2} \\
\Longleftrightarrow\ & Q = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\pi\varepsilon_0 \cdot F} \ \vee \ Q = -2 \cdot r \cdot \sqrt{\pi\varepsilon_0 \cdot F}.
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist, das nur der Betrag der Ladung ermittelt werden kann. Es ist keine eindeutige Lösung, da die beiden Punktladungen sowohl positiv, als auch negativ geladen sein können.

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
|Q| &= 2 \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}} \\
&= 2{,}6 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

Die Ladungsmenge beider Ladungen beträgt $\pm 2{,}6 \cdot 10^{-7}$ C.

A18/2 [5]: Der Abstand zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom beträgt $d = 10^{-10}$ m. Das Proton trägt die Ladung $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, das Elektron hat die gleiche negative Ladung.

a) Wie groß ist die Coulomb-Kraft, mit der sich die beiden Teilchen anziehen?

b) Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen den beiden Teilchen?

c) In welchem Verhältnis stehen elektrostatische Anziehungskraft und Gravitationskraft? Hängt das Verhältnis vom Abstand der Teilchen ab?

gegeben:

$d = 10^{-10}$ m	: Abstand zwischen Proton und Elektron
$Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C	: Ladung des Protons

gesucht: F_{el}, F_{m}, $\frac{F_{\mathrm{Q}}}{F_{\mathrm{m}}}$

allgemeine Lösung:

a) Die gegebenen Werte werden in das Coulomb'sche Gesetz eingesetzt $F_{\mathrm{el}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|-Q^2|}{d^2}$. Es wird hier nur der Betrag der wirkenden Kraft errechnet wird, deshalb muß das negative Vorzeichen entfallen. Da das Proton positiv und das Elektron negativ geladen ist, ist die Kraft F_{el} eine Anziehungskraft.

b) Die gegebenen Werte werden in das Gravitationsgesetz eingesetzt $F_{\mathrm{m}} = \gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_{\mathrm{P}}}{d^2}$. Die Gravitationskraft ist immer eine Anziehungskraft.

c) Das Verhältnis beider Anziehungskräfte ist der Quotienten der oben angeführten Gesetze

$$\frac{F_{\mathrm{el}}}{F_{\mathrm{m}}} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{\gamma} \cdot \frac{\frac{Q^2}{d^2}}{\frac{m_e \cdot m_{\mathrm{P}}}{d^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\gamma} \cdot \frac{Q^2}{m_{\mathrm{e}} \cdot m_{\mathrm{P}}}.$$

Da der Abstand nicht mehr in der resultierenden Gleichung auftaucht ist das Kräfteverhältnis unabhängig vom Abstand von Proton und Elektron.

spezielle Lösung:

$$\text{a)}\ F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}} \cdot \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{\left(10^{-10}\ \text{m}\right)^2}$$
$$= 2{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

$$\text{b)}\ F_{\text{m}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\left(10^{-10}\ \text{m}\right)^2}$$
$$= 2{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

$$\text{c)}\ \frac{F_{\text{el}}}{F_{\text{m}}} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}} \cdot \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}$$
$$= 2{,}3 \cdot 10^{39}$$

Die elektrostatische Kraft beträgt $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ N, hingegen die Gravitationskraft ist $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ N. Das Verhältnis zwischen elektrostatischer und Gravitationskraft ist $2{,}3 \cdot 10^{39}$.

A18/3 [5]: 2 m von einer Ladung $Q_1 = 3 \cdot 10^{-9}$ C entfernt befindet sich eine Ladung $Q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ C. Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Mittelpunkt der Verbindungslinie zwischen beiden Ladungen?

gegeben:

$Q_1 = 3 \cdot 10^{-9}$ C	: erste Ladung
$Q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ C	: zweite Ladung
$r = 2$ m	: Abstand zwischen den Ladungen

gesucht: E

allgemeine Lösung:

Die Gleichung für die elektrische Feldstärke im radialsymmetrischen Feld werden für beide Ladungen aufgestellt, wobei zu beachten ist, daß nur der halbe Radius einzusetzen ist. Die Addition ergibt dann die Feldstärke für den Mittelpunkt der Verbindungslinie zwischen den beiden Ladungen

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4 \cdot Q_1}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4 \cdot Q_2}{r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}.$$

spezielle Lösung:

$$E = \frac{3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} - 2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}{4\ \mathrm{m}^2 \cdot \pi\varepsilon_0}$$
$$= 9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Die elektrische Feldstärke beträgt zwischen den Ladungen 9 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

A18/4 [1, 5]: Zwei Punktladungen $Q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ C und $Q_2 = 8 \cdot 10^{-7}$ C haben den Abstand $r = 1$ m. In welchem Punkt ist die elektrische Feldstärke 0 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$?

gegeben:

$Q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ C	: Ladung eins
$Q_2 = 8 \cdot 10^{-7}$ C	: Ladung zwei
$r = 1$ m	: Abstand zwischen den beiden Ladungen

gesucht: r_1, r_2

allgemeine Lösung:

Wenn die elektrische Feldstärke, in einem Punkt, zwischen zwei Ladungen 0 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ ist, so gilt für die Vektoren der Feldstärken $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$. Dies ist nur der Fall, wenn beide Ladungen das *gleiche* Vorzeichen tragen. Aus dieser Bedingung folgt auch $\frac{Q_1}{Q_2} > 0$. Die Gleichung für die Feldstärke beim radialsymmetrischen Feld ist $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$. Mit der Bedingung $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ ergibt sich

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \iff \frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{Q_2}{r_2^2}.$$

Setzt man nun für r_2 die Beziehung $r_2 = r - r_1$ ein, so erhält man

$$\frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{Q_2}{(r - r_1)^2} \iff \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1^2}{(r - r_1)^2}$$
$$\underset{r_1>0 \,\wedge\, r>r_1 \,\wedge\, \frac{Q_1}{Q_2}>0}{\iff} \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_2}} = \frac{r_1}{r - r_1}$$
$$\iff \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} = \frac{r - r_1}{r_1} = \frac{r}{r_1} - 1$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} + 1 = \frac{r}{r_1} \\
&\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} + \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}} = \frac{r}{r_1} \\
&\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} = \frac{r}{r_1} \\
&\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}} = \frac{r_1}{r} \\
&\Longleftrightarrow \frac{r \cdot \sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}} = r_1.
\end{aligned}
$$

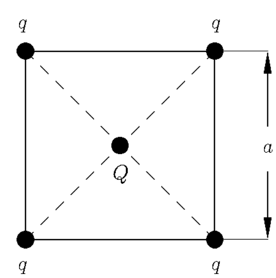
spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \tfrac{1\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}} + \sqrt{8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}}} \\
&= 0{,}33\ \mathrm{m} \cdot \tfrac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}} \\
&= 33\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_2 &= 100\ \mathrm{cm} - 33\ \mathrm{cm} \\
&= 67\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Der Punkt mit einer Feldstärke von 0 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ liegt 33 cm von Ladung eins und 67 cm von Ladung zwei entfernt.

A18/5 [10]: Vier gleich große positive Punktladungen q befinden sich an den Eckpunkten eines Quadrates mit der Seitenlänge a (siehe Abbildung). Welche Ladung Q müßte im Mittelpunkt des Quadrates angeordnet werden, damit das Gesamtsystem im Gleichgewicht ist?

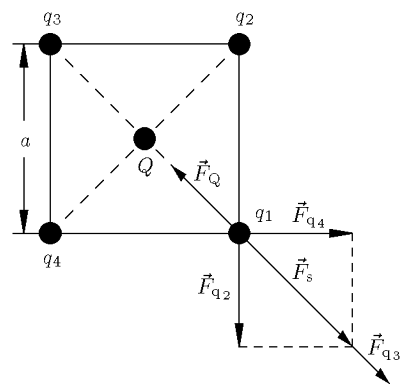


gegeben:

q	: Ladungsmenge in den Ecken des Quadrates
a	: Kantenlänge des Quadrates

gesucht: Q

Skizze:



allgemeine Lösung:

Da die vier Punktladungen in den Ecken positiv sind, stoßen sie sich ab, es wirken jeweils drei Kräfte auf jede der Ladungen ein. Welche Punktladung betrachtet wird ist, wegen der vorhandenen Symmetrie, gleich, da die Kraft betraglich konstant ist. Für meine weiteren Überlegungen ziehe ich die Ladung q_1 heran und untersuche die an ihr angreifenden Kräfte.

Zu berechnen sind also die drei Teilkräfte und die aus ihnen resultierende Gesamtkraft um die Ladungsmenge der in der Mitte der Anordnung positionierten negativen Ladung bestimmen zu können, deren Kraftvektor antiparallel zu dem Summenvektor der Abstoßungskräfte sein muß.

Zwei der drei Teilkräfte sind betraglich gleich. Es handelt sich hierbei um die Abstoßungskräfte zwischen den beiden benachbarten Kugeln q_2, q_4 und der betrachteten Kugel q_1. Für den Abstand zwischen q_2, q_4 und q_1 ist die Kantenlänge des Quadrates einzusetzen, also $F_{\mathrm{q_2,q_4}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_{2,4}^2}{a^2}$. Die dritte Kraft ist die Abstoßung zwischen der zu der betrachteten Kugel und der gegenüberliegenden Kugel q_3. Auch hier gilt das oben zitierte Coulomb'sche Gesetz, nur ist hierbei die Länge der Diagonalen als Abstand einzusetzen $r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$, es ergibt sich also $F_{\mathrm{q_3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_3^2}{2 \cdot a^2}$.

Nun ist die Vektorsumme der Teilkomponenten zu berechnen, speziell die Summe aus den beiden gleichen Teilkräften, die senkrecht aufeinander stehen. Der Betrag des resultierenden Vektors ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras $F_{\mathrm{s}} = \sqrt{F_{\mathrm{q_2}}^2 + F_{\mathrm{q_4}}^2} \underset{F_{\mathrm{q_2}} = F_{\mathrm{q_4}}}{=} \sqrt{2} \cdot F_{\mathrm{q_2,q_4}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2 \cdot a^2}$. Dieser Kraftvektor ist gleichgerichtet mit dem Vektor der dritten Teilkraft, eine Addition der Beträge ergibt den Betrag des Ergebnisvektor, die gesamte wirkende Abstoßungskraft ist also

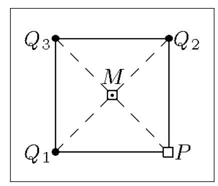
$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2 \cdot a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Dies ist gleichzeitig auch der Betrag der entgegengesetzt gerichtete Kraft, die von der Ladung Q im geometrischen Mittelpunkt des Quadrates auf die betrachtete Ladung q_1 ausgeübt werden muß, damit das System im Gleichgewicht ist. Der Abstand zum Mittelpunkt errechnet sich wieder mit dem Pythagoräischen Lehrsatz, wobei die Seitenlänge des Quadrates aber halbiert werden muß $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Für die anziehenden Kräfte gilt folglich $F_{\mathrm{Q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q \cdot Q}{a^2}$. Hiermit ergibt sich Q zu

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q \cdot Q}{a^2} \iff Q = -\frac{q}{4} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{2}\right).$$

Die Ladung Q muß $Q = -\frac{q}{4} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)$ betragen, damit das System im Gleichgewicht ist.

A18/6 [12]: Ein Quadrat hat die Seitenlänge $a = 0{,}5$ m. In zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken befinden sich die positiven Punktladungen $Q_1 = 4{,}24 \cdot 10^{-8}$ C und $Q_2 = Q_1$. In einer weiteren Ecke befinden sich die negative Punktladung $Q_3 = -12{,}0 \cdot 10^{-8}$ C (siehe Abbildung).



a) Berechnen Sie die Energiedichte $w_{\mathrm{e,M}}$ des Elektrischen Feldes für den Quadratmittelpunkt M.

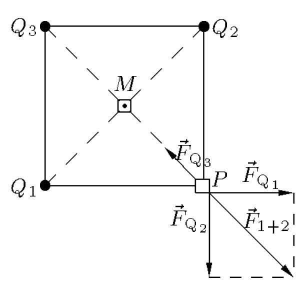
b) Berechnen Sie die Energiedichte $w_{\mathrm{e,P}}$ des elektrischen Feldes für den ladungsfreien Quadrateckpunkt P.

gegeben:

$Q_{1,2} = 4{,}24 \cdot 10^{-8}$ C	: positive Punktladungen
$Q_3 = -12{,}0 \cdot 10^{-8}$ C	: negative Punktladung
$a = 0{,}5$ m	: Seitenlänge des Quadrates

gesucht: $w_{\mathrm{e,M}}$, $w_{\mathrm{e,P}}$

Skizze:



allgemeine Lösung:

a) Die Definitionsgleichung für die elektrische Energiedichte lautet $w_{\mathrm{el}} = \frac{D \cdot E}{2}$, wobei $D = \varepsilon_0 \cdot E$ ist, daß heißt $w_{\mathrm{el}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2}$. Die Feldstärke läßt sich aber mit dem Coulomb'schen Gesetz berechnen, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind. Die Punktladungen Q_1 und Q_2 sind gleich, ihre Entfernung vom Punkt M stimmen ebenfalls überein. Ihre beiden Feldstärkevektoren sind somit im Punkt M betraglich gleich, aber antiparallel, somit fallen sie aus der Betrachtung heraus, da sie sich zum Nullvektor addieren.
Einzig die Punktladung Q_3 wirkt auf M, die Feldstärke ist in diesem Punkt $E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{r^2}$. Der Abstand der Ladung von M ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, die Feldstärke im Punkt M beträgt folglich $E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot Q_3}{a^2}$, die elektrische Energiedichte somit

$$
\begin{aligned}
& w_{\mathrm{e,M}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2} \;\wedge\; E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot Q_3}{a^2} \\
\Longleftrightarrow\; & w_{\mathrm{e,M}} = \frac{4 \cdot \varepsilon_0 \cdot Q_3^2}{2 \cdot 16\,\pi^2 \varepsilon_0^2\, a^4} = \frac{Q_3^2}{8\,\pi^2 \varepsilon_0\, a^4}.
\end{aligned}
$$

b) Ich gehe wie bei a) vor, indem ich zuerst die Feldstärke in dem Punkt P berechne. Hierbei ist zu beachten, das die Feldstärkevektoren aller drei Ladungen vektoriell addiert werden müssen. Im einzelnen heißt das (siehe Skizze), daß sich der Betrag der Summe der Vektoren von Q_1 und Q_2 aus dem Satz des Pythagoras ergibt $E_{\mathrm{s}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \underset{E_1 = E_2}{=} \sqrt{2} \cdot E_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{1,2}}{a^2}$, hierbei ist zu beachten das die beiden Ladungen gleich sind. Als Abstand zwischen P und den betrachteten Ladungen ist bei Q_1 und Q_2 die Kantenlänge des Quadrates einzusetzen, bei Q_3 die Länge der Hauptdiagonalen, die ich mit dem Satz des Pythagoras ermittele $r = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$. Der Feldstärkevektor von Q_3 ist antiparallel zu dem Summenvektor von Q_1 und Q_2, $E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{2 \cdot a^2}$ also ist der resultierende Summenvektor $E_{\mathrm{P}} = E_{\mathrm{s}} + E_3$. Die Feldstärke in P ist

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{P}} &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{1,2}}{a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_3}{2 \cdot a^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot Q_{1,2} + \frac{Q_3}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Die elektrische Energiedichte ist folglich

$$
\begin{aligned}
& w_{\mathrm{e,P}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E_{\mathrm{P}}^2}{2} \;\wedge\; E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot Q_{1,2} + \frac{Q_3}{2}\right) \\
\Longleftrightarrow\; & w_{\mathrm{e,P}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot Q_{1,2} + \frac{Q_3}{2}\right)^2}{2 \cdot 16\,\pi^2 \varepsilon_0^2\, a^4} \\
\Longleftrightarrow\; & w_{\mathrm{e,P}} = \frac{\left(\sqrt{2} \cdot Q_{1,2} + \frac{Q_3}{2}\right)^2}{32\,\pi^2 \varepsilon_0\, a^4}.
\end{aligned}
$$

spezielle Lösung:

$$\text{a) } w_{\mathrm{e,M}} = \frac{(-12{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C})^2\ \mathrm{V\ \ m}}{8\,\pi^2\, 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C} \cdot (0{,}5\ \mathrm{m})^4}$$
$$= 3{,}30 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\text{b) } w_{\mathrm{e,P}} = \frac{\left(\sqrt{2} \cdot 4{,}24 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} - \frac{12{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}}{2}\right)^2\ \mathrm{V\,m}}{32\,\pi^2\, 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C} \cdot (0{,}5\ \mathrm{m})^4}$$
$$= 7{,}98 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

Die Energiedichte beträgt in M $3{,}30 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$ in P hingegen $7{,}98 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$.

19 Kondensator

A19/1 [10]: Berechnen Sie die Kapazität der Erde als Kugelkondensator! Welches Potential würde die Erdoberfläche erhalten, wenn man auf ihr eine positive Ladung von 1 C gleichmäßig verteilen würde? (In unendlicher Entfernung sei das Potential Null.)

gegeben:

$Q = 1\ \mathrm{C}$: Ladung des Kugelkondensators

gesucht: C

allgemeine Lösung:
Die Spannung des Kondensators „Erde" ergibt sich aus der Potentialdifferenz eines Punktes der Oberfläche, mit dem Abstand r_E vom Erdmittelpunkt, und dem „Unendlichen" zu $U = V(r_\mathrm{E}) - \lim\limits_{u \to +\infty} V(u) = V(r_\mathrm{E})$. Das Potential und somit die Spannung des Kugelkondensators Erde ist mit $\varepsilon_\mathrm{r} = 0$

$$V(r_\mathrm{E}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathrm{E}}.$$

Seine Kapazität ist

$$C_\mathrm{E} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_\mathrm{E}}} = 4\pi\varepsilon_0 r_\mathrm{E}.$$

spezielle Lösung:

$$V(r_\mathrm{E}) = \frac{1\ \mathrm{C\,V\,m}}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C} \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1410\ \mathrm{V} \cdot \frac{1\ \mathrm{kV}}{1000\ \mathrm{V}} \\
&= 1{,}41\ \mathrm{kV}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_\mathrm{E} &= 4 \cdot \pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C} \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m} \\
&= 7{,}08 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{F} \cdot \frac{1000\ \mathrm{mF}}{1\ \mathrm{F}} \\
&= 0{,}708\ \mathrm{mF}
\end{aligned}
$$

Das Potential an der Erdoberfläche beträgt 1,41 kV. Der Kugelkondensator Erde hat eine Kapazität von 0,708 mF.

A19/2 [10]: Zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$ und $C_2 = 2\ \mu\mathrm{F}$ werden mit einer Spannung von 100 V aufgeladen. Nach Trennung von der Spannungsquelle wird die positive Platte des ersten Kondensators mit der negativen Platte des zweiten Kondensators verbunden und umgekehrt. Welche Spannung liegt danach an den Kondensatoren?

gegeben:

$C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$	: Kapazität des ersten Kondensators
$C_2 = 2\ \mu\mathrm{F}$	: Kapazität des ersten Kondensators
$U_1 = 100\ \mathrm{V}$	: gemeinsame angelegte Spannung

gesucht: U_2

allgemeine Lösung:

Die Spannung ist konstant, also unterscheiden sich beide Kondensatoren, $\mathfrak{K}_1$ mit der Kapazität C_1 und $\mathfrak{K}_2$ mit der Kapazität C_2, nur durch die Ladungsmenge, die sie tragen. Nach der Trennung von der Spannungsquelle fließen negative Ladungen von der negativen Platte des $\mathfrak{K}_2$ auf die positive Platte des $\mathfrak{K}_1$ und zwar mehr als dieser positive enthält, so daß eine Umpolung erfolgt, da $C_1 < C_2$. Umgekehrt fließen mehr Ladungen, als im Überschuß vorhanden sind, von der noch negativen Platte des $\mathfrak{K}_1$ auf die Platte des $\mathfrak{K}_2$, so daß auch hier die Polung wechselt. Denkt man sich die Kombination von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als einen Kondensator, so gilt für dessen Kapazität, es handelt sich ja um eine Parallelschaltung, $C = C_1 + C_2$, als Ladung ist die Ladung der positiven Platte des $\mathfrak{K}_2$ vermindert um die negative Ladungsmenge des $\mathfrak{K}_1$ einzusetzen $Q = C_2 \cdot U_1 - C_1 \cdot U_1 = U_1 \cdot (C_2 - C_1)$, da als die Ladung eines Kondensators *nur* die Ladung der positiven Platte gerechnet wird. Die Spannung der Anordnung beträgt

$$
\begin{aligned}
& C = \frac{Q}{U_2} \ \wedge \ C = C_1 + C_2 \ \wedge \ Q = U_1 \cdot (C_2 - C_1) \\
\Longleftrightarrow\ & C_1 + C_2 = \frac{U_1 \cdot (C_2 - C_1)}{U_2} \\
\Longleftrightarrow\ & U_2 = \frac{U_1 \cdot (C_2 - C_1)}{C_1 + C_2}.
\end{aligned}
$$

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \frac{100\ \mathrm{V} \cdot (2\ \mu\mathrm{F} - 1\ \mu\mathrm{F})}{1\ \mu\mathrm{F} + 2\ \mu\mathrm{F}} \\
&= 33\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

An den Kondensatoren liegt eine Spannung von 33 V an.

A19/3 [12]: Ein Plattenkondensator hat die Plattenfläche $A = 0{,}0625\ \mathrm{m}^2$. Zwischen den Platten befindet sich Luft; die Dielektrizitätszahl beträgt $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$. Der Plattenabstand d wird jeweils so gering eingestellt, daß das Feld zwischen den Platten als homogen angesehen werden kann.

a) Der Plattenabstand beträgt $d_1 = 3{,}5$ mm. An den Kondensator wird eine Spannungsquelle mit der Spannung $U_1 = 100\,\mathrm{V}$ angeschlossen. Bei angeschlossener Spannungsquelle wird der Plattenabstand auf $d_2 = 2{,}5$ mm verringert. Berechnen Sie den Energiezuwachs ΔE_1, den der Kondensator bei der Änderung des Plattenabstandes erhält.

b) Berechnen Sie die Ladung Q, die der Kondensator am Ende des in Teilaufgabe a) beschriebenen Vorganges trägt.

c) Der Plattenabstand beträgt $d_2 = 2{,}5$ mm. Die Spannungsquelle wird vom Kondensator getrennt. Bei getrennter Spannungsquelle wird der Plattenabstand auf den ursprünglichen Abstand $d_1 = 3{,}5$ mm eingestellt. Berechnen Sie den Energiezuwachs ΔE_2, den der Kondensator bei der Änderung des Plattenabstandes erhält.

d) Berechnen Sie die Spannung U_2, die zwischen den Kondensatorplatten am Ende des in Teilaufgabe c) beschriebenen Vorganges liegt.

e) Der ursprüngliche Zustand des Plattenkondensators ist durch die Größenwerte ε_0, ε_r, A, d_1, U_1 festgelegt. Der Endzustand des Plattenkondensators ist durch die Größenwerte ε_0, ε_r, A, d_1, U_2 festgelegt. Die Spannung U_2 kennen Sie aufgrund der Bearbeitung von Teilaufgabe d). Berechnen Sie die Energiedifferenz

$$\Delta E_\mathrm{ges} = E_\mathrm{Ende} - E_\mathrm{Anfang}$$

mit Hilfe dieser Größenwerte. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a) und c).

gegeben:

$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$	: Dielektrizitätszahl von Luft
$A = 0{,}0625\ \mathrm{m}^2$	: Plattenfläche des Kondensators
$d_1 = 3{,}5\ \mathrm{mm} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}}{1000\ \mathrm{mm}} = 0{,}0035\ \mathrm{m}$	: erster Plattenabstand
$d_2 = 2{,}5\ \mathrm{mm} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}}{1000\ \mathrm{mm}} = 0{,}0025\ \mathrm{m}$	: zweiter Plattenabstand
$U_1 = 100\ \mathrm{V}$	: Ladespannung des Kondensators

gesucht: ΔE_1, ΔE_2, Q, U_2, ΔE_{ges}

allgemeine Lösung:

a) Die elektrische Feldenergie eines geladenen Plattenkondensators beträgt $E_i = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$ mit $i \in \{1;2\}$. Seine Kapazität ist $C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \frac{A}{d_i}$. Hieraus erhält man seine Energie $E = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot A \cdot U_1^2}{2 \cdot d_i}$, deren Differenz, da die Spannung konstant ist,

$$\Delta E_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot A \cdot U_1^2}{2 \cdot d_2} - \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot A \cdot U_1^2}{2 \cdot d_1} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A \cdot U_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$$

ergibt.

b) Die Kapazität des Plattenkondensators ist $C_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \frac{A}{d_2}$, ferner gilt $C_2 = \frac{Q}{U_1}$, also ist die Ladung

$$\frac{Q}{U_1} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \frac{A}{d_2} \iff Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot A \cdot U_1}{d_2}.$$

c) Auf der Kondensatorplatte sitzt die Ladungsmenge Q die, nach der Trennung von der Spannungsquelle, unverändert bleibt. Einsetzen der Ladungsmenge, wie sie in b) berechnet wurde und der Kapazitäten des Plattenkondensators, in eine andere Form der Kondensatorenergieformel, ergibt, für die Energiedifferenz,

$$\begin{aligned}
&\Delta E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_2} \\
\iff &\Delta E_2 = \frac{Q^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \ \wedge\ Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot A \cdot U_1}{d_2} \\
\iff &\Delta E_2 = \frac{\varepsilon_0^2 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}}^2 \cdot A^2 \cdot U_1^2}{2 \cdot d_2^2} \cdot \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2}\right) \ \wedge\ C_i = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \frac{A}{d_i} \ \wedge\ i \in \{1;2\} \\
\iff &\Delta E_2 = \frac{\varepsilon_0^2 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}}^2 \cdot A^2 \cdot U_1^2}{2 \cdot d_2^2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \frac{A}{d_1}} - \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot \frac{A}{d_2}}\right) \\
\iff &\Delta E_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot A \cdot U_1^2}{2 \cdot d_2^2} \cdot (d_1 - d_2).
\end{aligned}$$

d) Einsetzen der Beziehungen für die Ladung des Kondensators aus b) und seiner Kapazität in die Definitionsgleichung der Kapazität ergibt

$$C_1 = \frac{Q}{U_2} \iff U_2 = \frac{Q}{C_1} \wedge Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A \cdot U_1}{d_2} \wedge C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d_1}$$
$$\iff U_2 = \frac{\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A \cdot U_1}{d_2}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d_1}} = U_1 \cdot \frac{d_1}{d_2}.$$

e) Die Energiedifferenz ergibt sich aus der Gleichung für die Energie eines Kondensators und der Gleichung für dessen Kapazität. Der Abstand der Kondensatorplatten beträgt d_1. Die Energiedifferenz ist folglich

$$\Delta E_\mathrm{ges} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot \left(U_2^2 - U_1^2\right) \wedge C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d_1}$$
$$\iff \Delta E_\mathrm{ges} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A}{2 \cdot d_1} \cdot \left(U_2^2 - U_1^2\right) \wedge U_2 = U_1 \cdot \frac{d_1}{d_2}$$
$$\iff \Delta E_\mathrm{ges} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A}{2 \cdot d_1} \cdot \left(U_1^2 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2} - U_1^2\right)$$
$$\iff \Delta E_\mathrm{ges} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r} \cdot A \cdot U_1^2}{2} \cdot \left(\frac{d_1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1}\right).$$

Andererseits muß für die Energiedifferenz auch $\Delta E_\mathrm{ges} = \Delta E_1 + \Delta E_2$ gelten, da in Teilaufgabe a) die Energie berechnet wurde, die der Kondensator durch die mehr auffließenden Ladungen gewinnt und in c) wurde die Energie berechnet, die der Kondensator erhält, indem gegen die Anziehungskräfte der Platten Arbeit verrichtet wird.

spezielle Lösung:

a) $$\Delta E_1 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 0{,}0625\ \mathrm{m}^2 \cdot 100^2\ \mathrm{V}^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{0{,}0025\ \mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}0035\ \mathrm{m}}\right)$$
$$= 3{,}16 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J} \cdot \frac{10^6\ \mu\mathrm{J}}{1\ \mathrm{J}}$$
$$= 0{,}316\ \mu\mathrm{J}$$

b) $$Q = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 0{,}0625\ \mathrm{m}^2 \cdot 100\ \mathrm{V}}{0{,}0025\ \mathrm{m}}$$
$$= 2{,}21 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} \cdot \frac{10^9\ \mathrm{nC}}{1\ \mathrm{C}}$$
$$= 22{,}1\ \mathrm{nC}$$

c) $$\Delta E_2 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 0{,}0625\ \mathrm{m}^2 \cdot 100^2\ \mathrm{V}^2}{2 \cdot 0{,}0025^2\ \mathrm{m}^2} \cdot (0{,}0035\ \mathrm{m} - 0{,}0025\ \mathrm{m})$$

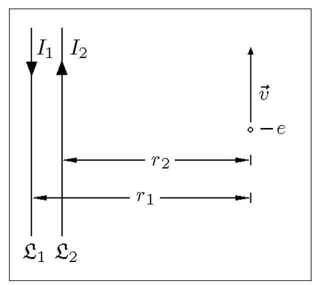
$$= 4{,}43 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J} \cdot \frac{10^{6}\ \mu\mathrm{J}}{1\ \mathrm{J}}$$
$$= 0{,}443\ \mu\mathrm{J}$$

d) $$U_2 = 100\ \mathrm{V} \cdot \frac{3{,}5\ \mathrm{mm}}{2{,}5\ \mathrm{mm}}$$
$$= 140\ \mathrm{V}$$

e) $$\Delta E_2 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \cdot 0{,}0625\ \mathrm{m}^2 \cdot 100^2\ \mathrm{V}^2}{2} \cdot \left(\frac{0{,}0035\ \mathrm{m}}{0{,}0025^2\ \mathrm{m}^2} - \frac{1}{0{,}0035\ \mathrm{m}}\right)$$
$$= 7{,}59 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J} \cdot \frac{10^{9}\ \mathrm{nJ}}{1\ \mathrm{J}}$$
$$= 0{,}759\ \mathrm{nJ}$$

Der Kondensator erhält einen Energiezuwachs von 0,316 μJ. Am Ende der Abstandsverkleinerung trägt der Kondensator 22,1 nC. Der Energiezuwachs nach der Abstandsvergrößerung beträgt 0,443 μJ. Die Spannung hat sich auf 140 V erhöht. Die gesamte Energiedifferenz, zwischen Anfangs- und Endzustand, beträgt 0,759 nJ.

20 Lorentz-Kraft



A20/1 [12]: Zwei lange, gerade und parallel zueinander angeordnete Leiter $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ sind stromdurchflossen. I_1 ist die Stromstärke im Leiter $\mathfrak{L}_1$; I_2 ist die Stromstärke im Leiter $\mathfrak{L}_2$. Die Stromrichtungen sind in der Abbildung eingezeichnet, sie sind entgegengesetzt zueinander. In der Umgebung der beiden Leiter bewegt sich ein Elektron. Zu einer bestimmten Zeit t_1 befindet es sich in der Ebene der beiden Leiter (Zeichenebene); der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Elektrons hat die gleiche Richtung wie der Strom im Leiter $\mathfrak{L}_2$. Das Elektron hat vom Leiter $\mathfrak{L}_1$ den Abstand r_1 und vom Leiter $\mathfrak{L}_2$ den Abstand r_2.

a) Stellen Sie einen Term für den Betrag der Kraft $\vec{F}$ auf, die zur Zeit t_1 auf das Elektron wirkt.

b) Das Elektron kann für die Zeit $t \geq t_1$ nur dann parallel zu den Leitern weiterfliegen, wenn die Stromstärken I_1 und I_2 in einem bestimmten Verhältnis stehen. Geben Sie dieses Verhältnis der Stromstärken an.

c) Die in Teilaufgabe b) genannte Bedingung für die geradlinige Bahn des Elektrons sei erfüllt. Nehmen Sie an, daß das Elektron zur Zeit t_2 geringfügig von seiner Bahn abweicht. Es hat dann die Abstände $r_1 + \Delta r$ und $r_2 + \Delta r$ beziehungsweise die Abstände $r_1 - \Delta r$ und $r_2 - \Delta r$ von den Leitern.
Zeigen Sie: Die auf das Elektron wirkende Kraft ist rücktreibend zur ursprünglichen Bahn des Elektrons gerichtet. Führen Sie die Betrachtung mit folgenden Größenwerten durch $I_1 = 21{,}0$ A; $r_1 = 6{,}00$ cm; $r_2 = 5{,}00$ cm; $\Delta r = 0{,}01$ cm.

gegeben:

$I_1 = 21{,}0$ A	: Stromstärke in $\mathfrak{L}_1$
$r_1 = 6{,}00$ cm	: Abstand des Elektrons von $\mathfrak{L}_1$
$r_2 = 5{,}00$ cm	: Abstand des Elektrons von $\mathfrak{L}_2$
$\Delta r = 0{,}01$ cm	: Abweichung des Elektrons

gesucht: F, Stromstärkenverhältnis, rücktreibende Kräfte

allgemeine Lösung:

a) Die beiden stromdurchflossenen Leiter $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ erzeugen in ihrer Umgebung radialsymmetrische Magnetfelder mit den magnetischen Flußdichten $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$. Für den Ort des Elektrons sind zur Zeit t_1 die Kraftflußdichtevektoren entgegengesetzt zueinander gerichtet und stehen senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor des Elektrons. Es wirken zwei LORENTZ-Kräfte auf das Elektron, $\vec{F}_{\mathrm{L},1}$ durch das Magnetfeld von $\mathfrak{L}_1$ und $\vec{F}_{\mathrm{L},2}$ durch das Magnetfeld von $\mathfrak{L}_2$. $\vec{F}_{\mathrm{L},1}$ steht senkrecht auf $\vec{v}$ und weist zu den Leitern hin. $\vec{F}_{\mathrm{L},2}$ steht ebenfalls senkrecht auf $\vec{v}$, weist aber von den Leitern weg. Der Betrag der, auf das Elektron wirkenden, Kraft F ergibt sich mit $F_{\mathrm{L},i} = e \cdot B_i \cdot v \ \wedge \ i \in \{1;2\}$ zu $F = F_{\mathrm{L},1} - F_{\mathrm{L},2} = |e \cdot B_1 \cdot v - e \cdot B_2 \cdot v| = e \cdot v \cdot |B_1 - B_2|$. Die magnetischen Induktionen B_1 und B_2 ergeben sich aus der Gleichung für die magnetische Induktion bei stromdurchflossenen Leitern $B_i = \mu_0 \cdot \frac{I_i}{2\pi r_i} \ \wedge \ i \in \{1;2\}$. Zur Zeit t_1 wirkt auf das Elektron die Gesammtkraft

$$F = e \cdot v \cdot \left| \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2\pi r_1} - \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi r_2} \right| = \frac{\mu_0 \cdot e \cdot v}{2\pi} \cdot \left| \frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2} \right| .$$

b) Das Elektron fliegt nur dann geradlinig und parallel zu den beiden Leitern, wenn keine Kräfte senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung, also zu den stromdurchflossenen Leitern hin oder weg, wirken, sich die Kräfte auf das Elektron im magnetische Feld zu 0 N summieren. Aus der Gleichung bei a) folgt dann mit $F_{\mathrm{L}} = 0$ N

$$\frac{\mu_0 \cdot e \cdot v}{2\pi} \cdot \left| \frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2} \right| = 0 \iff \left| \frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{r_2} \right| = 0 \iff \frac{I_1}{r_1} = \frac{I_2}{r_2} \iff \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

c) Die Stromstärke im Leiter $\mathfrak{L}_2$ beträgt $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1}{r_2} \iff I_2 = I_1 \cdot \frac{r_2}{r_1}$. Wenn eine rücktreibende Kraft, bei einer Auslenkung zu den beiden stromdurchflossenen Leitern hin, auf das Elektron wirkt so muß $F_1 < F_2$ sein. Bei entgegengesetzter Auslenkung, also von den Leitern Weg, muß $F_1 > F_2$ gelten, damit die resultierende Kraft, auf das Elektron, rücktreibend ist.

$$\begin{aligned}
& e \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (r_1 \mp \Delta r)} \cdot v \lesseqgtr e \cdot \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2 \cdot \pi \cdot (r_2 \mp \Delta r)} \cdot v \\
\iff & \frac{I_1}{r_1 \mp \Delta r} \lesseqgtr \frac{I_2}{r_2 \mp \Delta r} \ \wedge \ I_2 = \frac{I_1 \cdot r_2}{r_1} \\
\iff & \frac{I_1}{r_1 \mp \Delta r} \lesseqgtr \frac{I_1 \cdot r_2}{(r_2 \mp \Delta r) \cdot r_1} \\
\iff & \frac{r_1}{r_1 \mp \Delta r} \lesseqgtr \frac{r_2}{r_2 \mp \Delta r} \ \wedge \ \Delta r = r_1 - r_2 \\
\iff & \frac{r_1 \mp (r_1 - r_2)}{r_1} \gtreqless \frac{r_2 \mp (r_1 - r_2)}{r_2} \\
\iff & r_2 \cdot (r_1 \mp (r_1 - r_2)) \gtreqless r_1 \cdot (r_2 \mp (r_1 - r_2))
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow r_2 \cdot r_2 > r_1 \cdot (2 \cdot r_2 - r_1) \qquad \Longleftrightarrow r_2 \cdot (2 \cdot r_1 - r_2) < r_1 \cdot r_1$$
$$\Longleftrightarrow r_2^2 > 2 \cdot r_1 \cdot r_2 - r_1^2 \qquad \Longleftrightarrow 2 \cdot r_1 \cdot r_2 - r_2^2 < r_1^2$$
$$\Longleftrightarrow r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 > 0 \qquad \Longleftrightarrow -r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 - r_2^2 < 0$$

$$\Longleftrightarrow (r_1 - r_2)^2 > 0$$
$$\Longrightarrow r_1 \neq r_2.$$

spezielle Lösung:

$$\text{c}_1)\ I_2 = \frac{21{,}0\ \text{A} \cdot 5{,}00\ \text{cm}}{6{,}00\ \text{cm}} = 17{,}5\ \text{A}$$

$$\text{c}_2)\ 6\ \text{cm} \neq 5\ \text{cm}\ _{(w)}$$

Im Leiter $\mathfrak{L}_2$ fließt ein Strom von 17,5 A. Da die beiden Abstände von den Leitern nicht gleich sind, wirken auf das Elektron rücktreibende Kräfte.

A20/2 [12]: Im Hochfeldmagnetlabor des MAX-PLANCK-Institutes in Grenoble (Frankreich) können Magnetfelder mit der magnetischen Flußdichte $B = 20$ T erzeugt werden. Stellen Sie sich vor, daß in diesem Magnetfeld ein Radiumpräparat Alphateilchen mit der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = 4{,}80$ MeV aussendet. Ein Alphateilchen, das senkrecht zu den Feldlinien in das Magnetfeld eintritt, durchläuft eine Kreisbahn mit dem Radius r. Das Alphateilchen bewegt sich im Hochvakuum. Max-Planck-Institut!Hc

a) *Zeigen Sie:* Die Umlaufzeit T, die das Alphateilchen für einen Umlauf auf der Kreisbahn benötigt, hängt nicht von der kinetischen Energie E_{kin} des Alphateilchens ab. Der relativistische Massenzuwachs des Alphateilchens soll nicht berücksichtigt werden. Massenzuwachs

b) Berechnen Sie die Umlaufzeit T.

c) Berechnen Sie den Radius r der Kreisbahn. Verwenden Sie dazu die klassische Formel für die kinetische Energie. (Masse des Alphateilchens $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg; Ladung des Alphateilchens $Q_\alpha = 2 \cdot e$.)

gegeben:

$$E_{\text{kin}} = 4{,}80\ \text{MeV} \cdot \frac{10^6\ \text{eV} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{MeV} \cdot 1\ \text{eV}} = 7{,}68 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \qquad : \text{Energie des } \alpha\text{-Teilchens}$$

$B = 20\ \mathrm{T}$	: magnetische Induktion
$m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$	: Masse eines α-Teilchens
$Q_\alpha = 2 \cdot e$	: Ladung eines α-Teilchens

gesucht: T, r

allgemeine Lösung:

a) Da das zweifach positiv geladene Teilchen durch ein Magnetfeld fliegt, wirkt eine LORENTZ-Kraft $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ auf das Teilchen. Da es sich auf einer Kreisbahn bewegt und $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ immer zum Kreismittelpunkt weist, ist die LORENTZ-Kraft die Radialkraft. Für den Aufenthaltsort des Teilchens gilt, daß die Vektoren der magnetische Flußdichte $\vec{B}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$, senkrecht aufeinander stehen, deshalb ist $F_{\mathrm{L}} = Q_\alpha \cdot B \cdot v$. Gleichsetzen mit der Formel für die Radialkraft $F_R = m_\alpha \cdot \frac{v^2}{r}$ ergibt

$$\begin{aligned}
& Q_\alpha \cdot B \cdot v = m_\alpha \cdot \frac{v^2}{r} \ \wedge\ Q_\alpha = 2 \cdot e \\
\Longleftrightarrow\ & 2 \cdot e \cdot B = m_\alpha \cdot \frac{v}{r} \ \wedge\ v = \omega \cdot r \ \wedge\ \omega = \frac{2\pi}{T} \\
\Longleftrightarrow\ & 2 \cdot e \cdot B = m_\alpha \cdot \frac{2\pi}{T} \\
\Longleftrightarrow\ & T = \frac{\pi \cdot m_\alpha}{e \cdot B}.
\end{aligned}$$

Der Term für T enthält außer der magnetischen Induktion B nur die Naturkonstanten m_α und e. Er hängt somit nicht von der kinetischen Energie der Teilchen ab!

b) Einsetzen der Werte ergibt die gesuchte Umlaufzeit.

c) Die, nach der ersten Umformung der Gleichung bei a) entstandene Form, wird nach der gesuchten Größe r aufgelöst

$$2 \cdot e \cdot B = m_\alpha \cdot \frac{v}{r} \iff r = \frac{m_\alpha \cdot v}{2 \cdot e \cdot B}.$$

Aus der kinetische Energie berechnet sich die Geschwindigkeit der Alphateilchen zu

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot v^2 \iff v^2 = \frac{2 \cdot E_{\mathrm{kin}}}{m_\alpha} \iff v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{kin}}}{m_\alpha}}.$$

Einsetzen dieser Beziehung in die Gleichung für den Radius ergibt

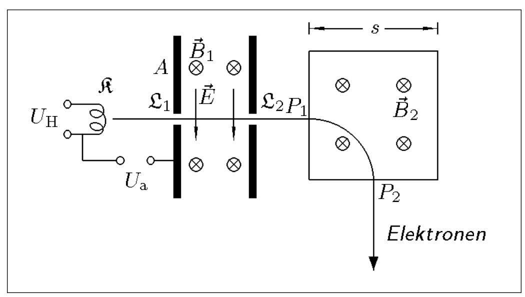
$$\begin{aligned}
& r = \frac{m_\alpha \cdot v}{2 \cdot e \cdot B} \ \wedge\ v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{kin}}}{m_\alpha}} \\
\Longleftrightarrow\ & r = \frac{m_\alpha}{2 \cdot e \cdot B} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{kin}}}{m_\alpha}} \\
\Longleftrightarrow\ & r = \frac{1}{e \cdot B} \cdot \sqrt{\frac{E_{\mathrm{kin}} \cdot m_\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad T &= \frac{\pi \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 20\ \mathrm{T}} \\
&= 6{,}52 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s} \cdot \frac{10^{9}\ \mathrm{ns}}{1\ \mathrm{s}} \\
&= 6{,}52\ \mathrm{ns}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{c)}\quad r &= \frac{1}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 20\ \mathrm{T}} \cdot \sqrt{\frac{7{,}68 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{2}} \\
&= 1{,}58 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s} \cdot \frac{100\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{m}} \\
&= 1{,}58\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Das Alphateilchen benötigt für einen Umlauf 6,52 ns. Seine Kreisbahn hat einen Radius von 1,58 cm.



A20/3 [12]: In der abgebildeten Versuchsanordnung ist $\mathfrak{K}$ eine Glühkathode, aus der Elektronen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten austreten. Die Anode $\mathfrak{A}$ ist eine Lochblende mit der Öffnung $\mathfrak{L}_1$. Zwischen Katode und Anode liegt die Beschleunigungsspannung $U_a = 500$ V. Parallel zur Anoden-Lochblende ist eine zweite Lochblende mit der Öffnung $\mathfrak{L}_2$ angeordnet. Die Kathode $\mathfrak{K}$ und die Lochblenden $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ befinden sich auf einer horizontalen Geraden. Zwischen den Lochblenden befindet sich ein homogenes Magnetfeld mit der magnetischen Flußdichte $B_1 = 0{,}012$ T und ein homogenes elektrisches Feld mit der elektrischen Feldstärke E. Die Feldlinien des Magnetfeldes weisen senkrecht in die Zeichenebene hinein; Die Feldlinien des elektrischen Feldes verlaufen senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfeldes und parallel zur Zeichenebene. Die Felder füllen den ganzen Raum zwischen den Lochblenden aus. Mit dieser Anordnung (Wien-Filter) soll erreicht werden, daß nur diejenigen Elektronen die Öffnung $\mathfrak{L}_2$ verlassen, welche bei dem Austritt aus der Glühkathode keine kinetische Energie besitzen. Diese Elektronen treffen im Punkt P_1 auf ein räumlich scharf begrenztes homogenes Magnetfeld zwischen den quadratischen Polschuhen eines Elektromagneten. Die Feldlinien weisen senkrecht in die Zeichenebene. Die Seitenlänge des Quadrates ist $s = 4{,}0$ cm. Die magnetische Flußdichte hat den Betrag B_2. Die Elektronen durchlaufen bei dieser Flußdichte einen Viertelkreis mit dem Radius $r = 2{,}0$ cm und verlassen das Magnetfeld im Punkt P_2.

Wien-Filter

Die ganze Anordnung befindet sich im Vakuum. Der Einfluß des Schwerefeldes kann unbeachtet bleiben.

a) Stellen Sie einen Term für die Geschwindigkeit v_1 auf, mit der diejenigen Elektronen die Öffnung $\mathfrak{L}_1$ erreichen, welche bei dem Austritt aus der Glühkathode keine kinetische Energie besitzen.

b) Stellen Sie eine Term für die elektrische Feldstärke E auf, die in der beschriebenen Anordnung (WIEN-Filter) wirksam ist. Dieser Term darf v_1 nicht enthalten.

c) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E mit Hilfe der gegebenen Größenwerte und Konstanten.

d) Stellen Sie einen Term für die magnetische Flußdichte B_2 auf. Dieser Term darf v_1 nicht enthalten.

e) Berechnen Sie die magnetische Flußdichte B_2 mit Hilfe der gegebenen Größenwerte und Konstanten.

f) Elektronen, welche bei dem Austritt aus der Glühkathode die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin},0} = 2$ eV besitzen, erfahren unmittelbar hinter der Öffnung $\mathfrak{L}_1$ im WIEN-Filter die Beschleunigung $\vec{a}$. Stellen Sie einen Term für die Geschwindigkeit v_2 auf, mit der diese Elektronen die Öffnung $\mathfrak{L}_1$ erreichen. Stellen Sie einen Term für den Betrag a der Beschleunigung auf. Dieser Term darf v_2 nicht enthalten. Berechnen Sie den Betrag a der Beschleunigung, und geben Sie die Richtung der Beschleunigung an. (Masse eines Elektrons $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.)

gegeben:

$U_a = 500$ V	: Beschleunigungsspannung
$B_1 = 0{,}012$ T	: Kraftflußdichte des Filterfeldes
$s = 4{,}0 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0{,}04$ m	: Seitenlänge des Quadrates
$r = 2{,}0 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0{,}02$ m	: Radius des Viertelkreises
$E_{\mathrm{kin},0} = 2 \text{ eV} \cdot \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ J	: Anfangsenergie einiger Elektronen

gesucht: v_1, v_2, E, B_2, a

allgemeine Lösung:

a) Sobald ein Elektron die Glühkatode $\mathfrak{K}$ verläßt wird es im elektrischen Feld beschleunigt, es wird an ihm Arbeit verrichtet. Ist das Elektron an der Lochblende $\mathfrak{L}_1$ angekommen, so besitzt es eine kinetische Energie von $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_1^2$. Auflösen der Beziehungen für E_{kin} ergibt v_1

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_1^2$$

$$\Longleftrightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m_{\text{e}}}$$
$$\Longleftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m_{\text{e}}}}.$$

Die kinetische Energie der Elektronen in $\mathfrak{L}_1$ ist gleich der an dem Elektron verrichteten Beschleunigungsarbeit $W_{\text{a}} = e \cdot U_{\text{a}}$, da laut Aufgabenstellung nur die Elektronen betrachtet werden sollen, die nach dem Austritt aus $\mathfrak{K}$ keine Anfangsenergie besitzen. Die Anfangsgeschwindigkeit dieser Elektronen ist somit $0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Einsetzen der Beziehung für W_{a} in die Formel für v_1 ergibt

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}}$$

b) Die Kräfte, auf die, zwischen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, fliegenden Elektronen müssen 0 N ergeben, damit ihre Flugbahn geradlinig bleibt. Die Beträge der elektrischen- und der LORENTZ-Kraft müssen gleich sein, damit sich die Kräfte des elektrischen und des magnetischen Feldes aufheben, da die beiden Kraftvektoren entgegengesetzt gerichtet sind. Die Kraft des homogenen elektrischen Feldes auf die fliegenden Elektronen berechnet sich zu $F_{\text{el}} = e \cdot E$, die LORENTZ-Kraft ist, da $\vec{B}_1 \perp \vec{v}_1$ und v_1 zwischen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ konstant, $F_{\text{L}} = e \cdot B_1 \cdot v_1$. Gleichsetzen ergibt die elektrische Feldstärke im WIEN-Filter

$$e \cdot E = e \cdot B_1 \cdot v_1 \ \wedge\ v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}} \ \Longleftrightarrow\ E = B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}}.$$

c) Nachschlagen und einsetzen der Naturkonstanten beziehungsweise der gegebenen Größen ergibt die elektrische Feldstärke.

d) Damit die Elektronen einen Viertelkreis fliegen muß auf sie eine Zentripetalkraft wirken $F_{\text{Z}} = m_{\text{e}} \cdot \frac{v_1^2}{r}$. Diese Zentripetalkraft ist die, auf die Elektronen wirkende, LORENTZ-Kraft. Da $B_2 \perp v_1$ ist $F_{\text{L}} = e \cdot B_2 \cdot v_1$. Gesucht ist die magnetische Flußdichte, die man durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen und auflösen erhält Zentripetalkraft

$$m_{\text{e}} \cdot \frac{v_1^2}{r} = e \cdot B_2 \cdot v_1$$
$$\Longleftrightarrow B_2 = \frac{m_{\text{e}} \cdot v_1}{e \cdot r} \ \wedge\ v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}}$$
$$\Longleftrightarrow B_2 = \frac{m_{\text{e}}}{e \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}}$$
$$\Longleftrightarrow B_2 = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_{\text{e}} \cdot U_{\text{a}}}{e}}.$$

e) Nachschlagen und einsetzen der Naturkonstanten beziehungsweise der gegebenen Größen ergibt die magnetische Flußdichte.

f) Für die Energie der Elektronen mit Anfangsgeschwindigkeit, nach dem Durchfliegen der Strecke von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{L}_1$, gilt $E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}}$. Nun kann mit der Formel von a) die Endgeschwindigkeit der Elektronen berechnet werden

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m_{\text{e}}}} \;\wedge\; E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}} \iff v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}})}{m_{\text{e}}}}.$$

Die Gesammtkraft im WIEN-Filter ist $\vec{F} = \vec{F}_{\text{L}} - \vec{F}_{\text{el}}$, wobei elektrische und magnetische Kraft entgegengesetzt gerichtet sind. Die LORENTZ-Kraft ist größer als die elektrische Kraft, da $v_2 > v_1$ und die LORENTZ-Kraft, auf die Elektronen, bei der Geschwindigkeit v_1 genau so groß ist, wie die elektrische Kraft. F_{L} nimmt bei steigender Geschwindigkeit zu, F_{el} bleibt jedoch konstant. Der Betrag der wirkenden Gesammtkraft auf die Elektronen, zwischen den beiden Lochblenden, ergibt sich somit zu $F = F_{\text{L}} - F_{\text{el}}$. Die Beschleunigung ist konstant geradlinig, da die wirkende Kraft konstant ist.
Die Kraft des homogenen elektrischen Felde auf jedes Elektron ist

$$F_{\text{el}} = e \cdot E \;\wedge\; E = B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}} \iff F_{\text{el}} = e \cdot B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}}.$$

Die Kraft des magnetischen Feldes auf ein Elektron ist

$$F_{\text{L}} = e \cdot B_1 \cdot v_2 \;\wedge\; v_2 = \sqrt{\tfrac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}})}{m_{\text{e}}}} \iff F_{\text{L}} = e \cdot B_1 \cdot \sqrt{\tfrac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}})}{m_{\text{e}}}},$$

da $\vec{v}_2 \perp \vec{B}_1$. Durch Subtraktion der beiden Terme ergibt sich die Gesammtkraft

$$F = e \cdot B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}})}{m_{\text{e}}}} - e \cdot B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}}.$$

Mit dem ersten Newton'schen Axiom ergibt sich dann die gesuchte Beschleunigung zu

$$\begin{aligned} m_{\text{e}} \cdot a &= e \cdot B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}})}{m_{\text{e}}}} - e \cdot B_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}} \\ \iff a &= \frac{e \cdot B_1}{m_{\text{e}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{kin},0} + e \cdot U_{\text{a}})}{m_{\text{e}}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_{\text{a}}}{m_{\text{e}}}} \right). \end{aligned}$$

Die Beschleunigung ist mit der LORENTZ-Kraft gleich gerichtet, da selbige stärker als die elektrische Kraft ist. $\vec{a}$ ist nach unten gerichtet.

spezielle Lösung:

c) $E = 0{,}012\ \mathrm{T} \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 500\ \mathrm{V}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}}$

$$= 1{,}59 \cdot 10^{5}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot \frac{1\ \mathrm{kN}}{1000\ \mathrm{N}}$$

$$= 159\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}}$$

e) $B_2 = \dfrac{1}{0{,}02\ \mathrm{m}} \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 500\ \mathrm{V}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}}$

$$= 3{,}77 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T} \cdot \frac{1000\ \mathrm{mT}}{1\ \mathrm{T}}$$

$$= 3{,}77\ \mathrm{mT}$$

f) $a = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 0{,}012\ \mathrm{T}}{\sqrt{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} \cdot \left(\sqrt{2\ \mathrm{eV} + 500\ \mathrm{V}} - \sqrt{500\ \mathrm{V}}\right)$

$$= 5{,}58 \cdot 10^{13}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1\ \mathrm{Tm}}{10^{12}\ \mathrm{m}}$$

$$= 55{,}8\ \frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{s}^2}$$

Die elektrische Feldstärke zwischen den beiden Lochblenden beträgt 159 $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}}$. Die magnetische Flußdichte, die die Elektronen über die auftretenden LORENTZ-Kräfte in einen Viertelkreis zwingt, beträgt 3,77 mT. Die Elektronen mit Anfangsgeschwindigkeit werden im WIEN-Filter mit 55,8 $\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt.

21 Induktion, Induktivität, Feldenergie

A21/1 [12]: Eine „lange“ zylindrische Feldspule mit der Länge $l = 50{,}0$ cm hat $n_1 = 500$ kreisförmige Windungen mit dem Radius $r_1 = 1{,}5$ cm. Mit Hilfe eines Dreieckgenerators kann in der Feldspule eine Strom erzeugt werden, dessen Stromstärke gleichmäßig in jeder Sekunde um $\Delta I = 0{,}80$ A anwächst.
Eine zylindrische Induktionsspule mit der gleichen Länge l hat kreisförmige Windungen mit dem Radius r_2. Diese Spule soll vollständig in die Feldspule eingebracht werden; die Spulenachsen sollen zusammenfallen. Zwischen den Enden der Induktionsspule soll die zeitlich konstante Induktionsspannung $U_\mathrm{i} = 0{,}5$ mV induziert werden.

a) Zeigen Sie, daß sich das beschriebene Experiment realisieren läßt.

b) Berechnen Sie die Induktivität L_2 der Induktionsspule.

gegeben:

$l = 50{,}0\ \mathrm{cm} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}} = 0{,}500\ \mathrm{m}$	: Länge der Spulen
$r_1 = 1{,}5\ \mathrm{cm} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}} = 0{,}015\ \mathrm{m}$	: Radius der Feldspule
$n_1 = 500$	: Windungen der Feldspule
$n_2 = 1600$	: und der Induktionsspule
$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0{,}8\ \mathrm{A}$	: Stromstärkenänderung
$U_\mathrm{i} = 0{,}5\ \mathrm{mV} \cdot \frac{1\ \mathrm{V}}{1000\ \mathrm{mV}} = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}$	: Induzierte Spannung

gesucht: r_2, L_2

allgemeine Lösung:

a) Das Experiment ist nur dann zu realisieren, wenn der Radius der Induktionsspule kleiner als der der Feldspule ist. Es gilt $U_\mathrm{i} = -n_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -n_2 \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$, da die, durch die magnetischen Feldlinien durchsetzte, Fläche sich nicht ändert. Die

Richtung des induzierten Stromes ist in diesem Fall ohne Belang, es wird der Betrag der Induktionsspannung im Weiteren verwendet. Die Feldlinien in einer Spule liegen parallel zur Spulenachse, durchsetzen folglich die Querschnittsfläche der Induktionsspule $A_2 = \pi \cdot r_2^2$. Das Feld der Induktionsspule berechnet sich nach der Feldstärke von Spulen zu $B = \mu_0 \cdot \frac{n_1 \cdot I}{l}$. Einsetzen beider Gleichungen in die oberste ergibt

$$\begin{aligned} & U_\mathrm{i} = n_2 \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \;\wedge\; A_2 = \pi \cdot r_2^2 \;\wedge\; B = \mu_0 \cdot \frac{n_1 \cdot I}{l} \\ \iff & U_\mathrm{i} = n_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\mu_0 \cdot \frac{n_1 \cdot I}{l}\right)}{\mathrm{d}t} \\ \iff & U_\mathrm{i} = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot r_2^2}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Auflösen nach dem Radius der Induktionsspule ergibt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} & r_2^2 = \frac{U_\mathrm{i} \cdot l}{\pi \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I} \\ \underset{r_2>0}{\iff} & r_2 = \sqrt{\frac{U_\mathrm{i} \cdot l}{\pi \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I}}. \end{aligned}$$

b) Da die Feldspule eine „lange“ Spule ist, ist die Induktionsspule dies auch. Die Induktivität der Induktionsspule ergibt sich aus deren geometrischen Abmessungen nach der Gleichung $L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot A}{l}$, durch einsetzen der Beziehung für den Radius selbiger, zu

$$\begin{aligned} & L_2 = \mu_0 \cdot \frac{n_2^2 \cdot A_2}{l} \;\wedge\; A_2 = \pi \cdot r_2^2 \;\wedge\; r_2^2 = \frac{U_\mathrm{i} \cdot l}{\pi \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I} \\ \iff & L_2 = \mu_0 \cdot \frac{\pi \cdot n_2^2 \cdot \frac{U_\mathrm{i} \cdot l}{\pi \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I}}{l} \\ \iff & L_2 = \mu_0 \cdot \frac{\pi \cdot n_2^2 \cdot U_\mathrm{i} \cdot l}{\pi \cdot \mu_0 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot l} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I} \\ \iff & L_2 = \frac{n_2 \cdot U_\mathrm{i}}{n_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I}. \end{aligned}$$

spezielle Lösung:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\frac{0{,}0005 \text{ V A m} \cdot 0{,}5 \text{ m s}}{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s} \cdot 500 \cdot 1600 \cdot 0{,}8 \text{ A}}} \\ &= 9{,}95 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} L_2 &= \frac{0{,}0005 \text{ V} \cdot 1600 \text{ s}}{500 \cdot 0{,}8 \text{ A}} \\ &= 2{,}00 \text{ mH} \end{aligned}$$

Der Radius der Induktionsspule beträgt 1 cm. Er ist kleiner als der der Feldspule (1,5 cm), das Experiment ist somit durchführbar. Die Induktivität der Induktionsspule beträgt 2 mH.

22 Tabellen

22.1 Das griechische und das deutsche Alphabet

Die, in der Tabelle, zusätzlich angegebene Buchstaben ε, ϑ, $\varkappa$, ϖ, ϱ, ς, φ können als „handgeschriebene“ griechische Kleinbuchstaben angesehen werden.

α	A	Alpha	ν	N	Ny
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gamma	o	O	Omikron
δ	Δ	Delta	π, ϖ	Π	Pi
ϵ, ε	E	Epsilon	ρ, ϱ	P	Rho
ζ	Z	Zeta	σ, ς	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ, ϑ	Θ	Theta	υ	Υ	Ypsilon
ι	I	Jota	ϕ, φ	Φ	Phi
$\kappa, \varkappa$	K	Kappa	χ	X	Chi
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	My	ω	Ω	Omega

Das deutsche Alphabet:

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{A}$	A	$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{N}$	N
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{O}$	O
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{C}$	C	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{P}$	P
$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{D}$	D	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{Q}$	Q
$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{E}$	E	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{R}$	R
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{F}$	F	$\mathfrak{s}$	$\mathfrak{S}$	S
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{G}$	G	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{T}$	T
$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{H}$	H	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{U}$	U
$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{I}$	I	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{V}$	V
$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{J}$	J	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{W}$	W
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{K}$	K	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{X}$	X
$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{L}$	L	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{Y}$	Y
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{M}$	M	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{Z}$	Z

22.2 physikalische Konstanten

Bis auf m_H wurden die physikalischen Konstanten den Veröffentlichungen des *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA) von 1986 entnommen.

Name und Zeichen der Konstanten	**Größenwert und Einheit**
Erdbeschleunigung g (Normwert)	$g = 9{,}80665\ \mathrm{m\,s^{-2}} \approx 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$
Lichtgeschwindigkeit c [8]	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Gravitationskonstante γ	$\gamma = (6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Avogadro-Konstante N_A	$N_A = (6{,}0221367 \pm 0{,}0000036) \cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol^{-1}}$
Molvolumen (273,16 K; 1013,25 hPa) V_m	$V_\mathrm{m} = (22{,}41410 \pm 0{,}00019)\ \mathrm{m^3\,kmol^{-1}}$
Universelle Gaskonstante R	$R = (8{,}314510 \pm 0{,}000070) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J\,K^{-1}\,kmol^{-1}}$
Boltzmann-Konstante k	$k = (1{,}380658 \pm 0{,}000012) \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
Atomare Masseneinheit 1 u	$1\ \mathrm{u} = (1{,}6605402 \pm 0{,}0000010) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Wasserstoff-Atommasse m_H	$m_\mathrm{H} = (1{,}6735339 \pm 0{,}0000010) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
magnetische Feldkonstante μ_0 [9]	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$ $= (1{,}2566370614\ldots) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
elektrische Feldkonstante ε_0 [9]	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c^2}$ $= (8{,}854187817\ldots) \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}}$
Faraday-Konstante F	$F = (9{,}6485309 \pm 0{,}0000029) \cdot 10^{7}\ \mathrm{C\,kmol^{-1}}$
Masse des Elektrons m_e	$m_\mathrm{e} = (9{,}1093897 \pm 0{,}00000546) \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ $= (5{,}48579903 \pm 0{,}00000013) \cdot 10^{-14}\ \mathrm{u}$ $= (0{,}51099906 \pm 0{,}00000015)\ \mathrm{MeV}\ c^{-2}$
spezifische Ladung des Elektrons $\frac{e}{m_\mathrm{e}}$	$\frac{e}{m_\mathrm{e}} = (1{,}75881962 \pm 0{,}00000053) \cdot 10^{11}\ \mathrm{C\,kg^{-1}}$
Elektronenvolt E	$1\ \mathrm{eV} = (1{,}60217733 \pm 0{,}00000049) \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$
Plancksches Wirkungsquantum h	$h = (6{,}6260755 \pm 0{,}0000040) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
Rydberg Konstante ($Ry \approx C$; $Ry^* = \frac{Ry}{C}$)	$Ry = (3{,}2898419499 \pm 0{,}0000000039) \cdot 10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$ $Ry^* = (1{,}0973731534 \pm 0{,}0000000013) \cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$
Masse des Protons m_P	$m_\mathrm{P} = (1{,}6726231 \pm 0{,}0000010 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $= (1{,}007276470 \pm 0{,}000000012)\ \mathrm{u}$ $= (938{,}27231 \pm 0{,}00028)\ \mathrm{MeV}\ c^{-2}$
Massenverhältnis Proton-Elektron $\frac{m_\mathrm{P}}{m_\mathrm{e}}$	$\frac{m_\mathrm{P}}{m_\mathrm{e}} = 1836{,}152701 \pm 0{,}000037$
Masse des Neutrons m_N	$m_\mathrm{N} = (1{,}6749286 \pm 0{,}0000010) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $= (1{,}008664904 \pm 0{,}000000014)\ \mathrm{u}$ $= (939{,}56563 \pm 0{,}00028)\ \mathrm{MeV}\ c^{-2}$

[8] Die Lichtgeschwindigkeit ist als exakter Größenwert angegeben (CODATA).

[9] Die Konstanten μ_0 und ε_0 sind laut Definition ohne Fehlerangabe (CODATA).

22.3 astronomische Daten

Bezeichnung	**Größenwert und Einheit**
mittlere Entfernung Erde—Sonne R_E	$R_E = 1\ AE = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ m$
mittlere Entfernung Erde—Mond R_M	$R_M = 3{,}844 \cdot 10^{8}\ m$
Umlaufzeit des Mondes um die Erde (synodischer Monat) t_M	$t_M = 29{,}5306\ d$

23 Quellennachweis der Aufgaben

[1] Anmerkungen, Ergänzungen und eigene Kreationen, Christian Buth

[2] Aufgabensammlung zur Physik 10. Auflage, Fritz Heywang / Hans-Karl Treiber, Bernhard Friedrich Voigt

[3] Telekolleg II Physik Mechanik 2. Auflage 1991, Eckhard Huber, TR-Verlagsunion München

[4] 25. internationale Physik Olympiade 1994 Peking

[5] Metzler Physik 2. Auflage 1994, Joachim Grehn (Hg.), Schroedel Schulbuchverlag (Gesammtband)

[6] Physik-Aufgaben Sekundarstufe II 14. Auflage, Oskar Höfling, Dümmler 4189

[7] Physikalische Aufgaben 21. Auflage 1981, Helmut Lindner, Vieweg

[8] Aufgabensammlung Physik Sekundarbereich II, Helmut Vogel, Schroedel 1985

[9] Klausur- und Abiturtraining Physik 2, Hans-Werner Kirchhoff (Hg.), Aulis Verlag Deubner & Co KG 1988

[10] Physik, Elektrizität, Optik, Raum und Zeit, Horst Hänsel / Werner Neumann, Spektrum Akademischer Verlag 1993

[11] Physik, Mechanik und Wärmelehre, Horst Hänsel / Werner Neumann, Spektrum Akademischer Verlag 1993

[12] Physik-Aufgaben, Übungsbuch mit vollständigen Lösungen, Bernd Mirow / Gerhard Becker, Dümmler 4192

24 Index