Dieses Dokument wurde von **Christian Buth** erstellt.

Es ist auf meinen Internetseiten unter

http://www.Christian.Buth.mysite.de

frei erhältlich.

Sollten Sie Probleme mit der Anzeige haben oder einen Fehler entdecken, wenden Sie sich bitte an

cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de .

Der geometrisch Vektor

Einführung

[„*Wo simmer denn dran? Aha, heute krieje mer de Dampfmaschin. Also, wat is en Dampfmaschin? Da stelle mer uns janz dumm. Und da sage mer so: En Dampfmaschin, dat is ene jroße schwarze Raum, der hat hinten un vorn e Loch. Dat eine Loch, dat is de Feuerung. Und dat andere Loch, dat krieje mer später.*“

(Physiklehrer Bömmel in Heinrich Spoerls Feuerzangenbowle)]

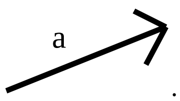
„Wo simmer denn dran? Aha, heute krieje mer de Vektor. Also, wat is en Vektor? Da stelle mer uns janz dumm. Und da sage mer so: En Vektor, dat is ene Pfeil in ene jroße schwarze Raum, der hat hinten un vorn e Ende. Dat eine Ende, dat is de Fuß. Und dat andere Ende, dat krieje mer später.“

(Frei dem Physiklehrer Bömmel aus Heinrich Spoerls
Feuerzangenbowle in den Mund gelegt)

So ähnlich formulierte Physiklehrer Bömmel in dem Film Feuerzangenbowle von Heinrich Spoerl seine Gedanken zum Thema Dampfmaschin. Die Worte, die ich ihm in den Mund legte führen direkt in den Bereich der Mathematik, dem ich dieses Kapitel widme: Der geometrischen Vektorrechnung. Alle Ausführungen beziehen sich, soweit nicht anders angegeben, immer auf den mathematischen Vektorbegriff ohne physikalische Einschränkungen.

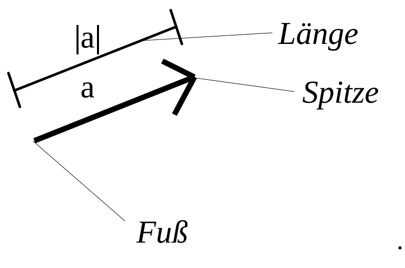
Erläuterung einiger Termini

Um sich präzise auf diesem Gebiet auszudrücken ist es erforderlich einige Begriffe zu erklären, auf die der Leser immer wieder stoßen wird. Bömmel „definierte“ einen geometrischen Vektor als Pfeil, vorerst möchte ich es bei dieser Vorstellung belassen:



Das $\vec{a}$ ist der Name des Vektors. Um zu kennzeichnen, das es sich bei dem *a* um einen Vektor handelt, schreibt man über den Buchstaben einen Pfeil $\vec{a}$ oder eine „Harke“, einen halben Pfeil $\overharpoon{a}$, je nach Geschmack. Dieser ganze oder halbe Pfeil über dem Buchstaben zeigt *immer* mit der Spitze nach rechts, egal wie der Vektor auf dem Papier gerichtet ist, der mit dem Buchstaben bezeichnet wird.

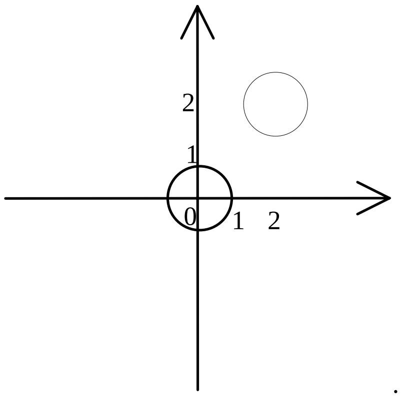
Ein Vektor hat eine **Spitze** und einen **Fuß**. Die Grafik zeigt, was mit diesen Begriffen gemeint ist:



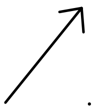
Unter dem Betrag eines geometrischen Vektors versteht man dessen Länge in einer bestimmten Einheit beispielsweise Zentimeter für einen Wegvektor.

Definition eines geometrischen Vektors

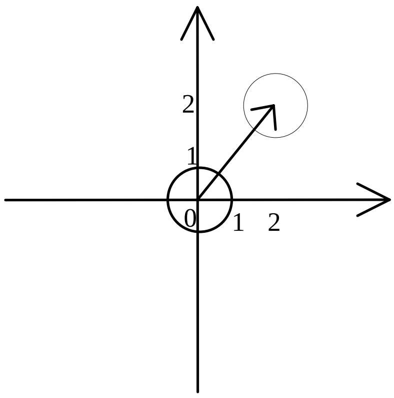
Doch was ist nun ein Vektor? Die Vorstellung eines Pfeils genügt nicht, um einige der Vektorgesetze zu erklären. Stellen wir uns vor wir möchten den Kreis in der folgenden Abbildung verschieben:



Ich muß seinen Mittelpunkt hierzu zwei Einheiten nach rechts und zwei nach oben schieben. Diese zwei Verschiebungsinformationen lassen sich aber wesentlich kompakter fassen, wenn ich einen Vektor angebe, der einen Punkt um zwei nach links und zwei nach oben verschiebt beispielsweise folgendes Exemplar:



Es ist dann nur noch nötig diese Verschiebung vom Mittelpunkt des Kreises her abzutragen und der Mittelpunkt des neuen Kreises ist fertig konstruiert. Ein Vektor gibt also die Richtung und die Länge einer Verschiebung eines Punktes an.



<u>D2.1 *(Vektor)*:</u> Ein *Vektor* gibt die Richtung und die Länge einer *Verschiebung* eines Punktes an. In der Ebene läßt er sich durch einen Pfeil darstellen. Die Spitze des Pfeils gibt dann die Richtung des Vektors und somit der Verschiebung an.
Unter einem *Ortsvektor* versteht man Vektoren, die von einem festgehaltenen Punkt genannt *Ursprung* aus abgetragen werden, daß heißt ihr Fuß liegt auf dem Ursprung.
Ein *Nullvektor* bezeichnet einen Vektor der Länge Null, ein Punkt also. Nullvektoren zeigen in alle Richtungen.
Der *Gegenvektor* eines Vektors, der nicht der Nullvektor ist, erhält man durch umkehren des Vektorpfeils, daß heißt Kopf und Fuß werden vertauscht.

Die freie Verschiebbarkeit von Vektoren auf der Ebene [Einfache Vektorgesetze]

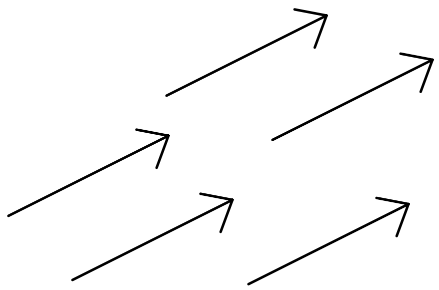
Wo liegt denn eine Verschiebung auf einem Blatt Papier? Rechts unten oder lieber oben links? Die Antwort lautet: überall auf dem Papier ist der gleiche Vektor zu finden. Unter einem Vektor versteht man gemäß D2.1 eine Verschiebung. Wo diese Verschiebung angreift[1], das ist für den Vektor selber unwesentlich.

<u>D2.2 *(Pfeilklassen)*:</u> Ein Vektor bleibt gleich, egal wo er auf der Ebene plaziert wird, solange seine Richtung und sein Betrag konstant sind. Man spricht in der Mathematik auch von **Pfeilklassen**, eine Klasse wird durch einen bestimmten Betrag und einen bestimmte Richtung jedes ihrer Vertreter (Vektoren) gekennzeichnet. Man kann

[1]Unter Angriffspunkt verstehe ich hier den Punkt, wo der Fuß sitzt.

sich aus einer Pfeilklasse ein beliebig auf der Ebene plaziertes Exemplar heraussuchen. so wie es einem gerade am besten paßt und damit weiterarbeiten.
Dies gilt nur für freie Vektoren. Ortsvektoren dürfen *nicht* verschoben werden.

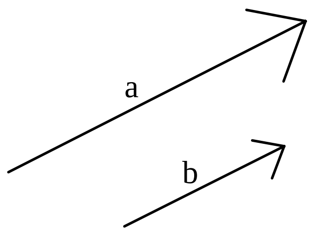
Das Gesetz ist leicht ersichtlich, wenn man sich vorstellt, das ein Vektor eine Verschiebung ist. Egal wo die Verschiebung nun ansetzt „wo sie sich befindet“, die Verschiebung bleibt gleich!



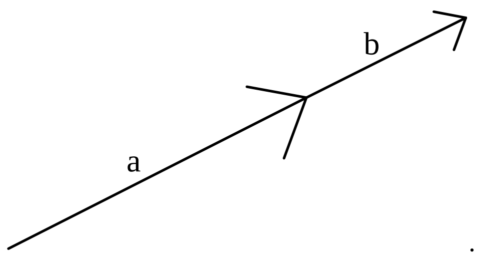
Die in der Grafik dargestellten Vektoren sind gemäß D2.1 alle gleich.

Vektoradditionsverfahren

Vektoren zu haben ist ja ganz schön, doch möchte man auch mit ihnen rechnen können. Was nützen einem die schönsten Zahlen, wenn man sie sich nur anschauen kann? Ich möchte in diesem Abschnitt die Vektoraddition erläutern. Sie werden sich vielleicht fragen, wie man Pfeile addieren kann, doch diese Frage löst sich von selbst, wenn man den Vektor als Verschiebung betrachtet. Wie addiere ich zwei Verschiebungen? Bevor ich allgemein vorgehe werde ich erstmal einen Spezialfall betrachten: beide Vektoren sind kollinear.



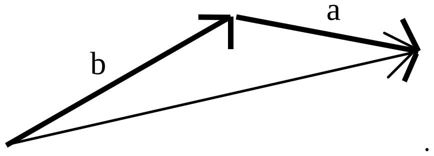
Da man die beiden Exemplare beliebig verschieben darf, gemäß D2.2, setze ich den Fuß von Vektor $\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$:



Es ist leicht zu erkennen, daß der Betrag des Vektors $\vec{a} + \vec{b}$ gleich der Summe der Beträge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Diese Erkenntnis führt uns zu der Definition:

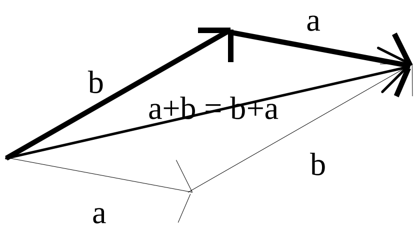
<u>D2.3 *(Addition zweier kollinearer Vektoren)*:</u> Zwei kollineare Vektoren addiert man, indem man deren Beträge addiert. Die Richtung des Summenvektors ist gleiche der Richtung der beiden Summandenvektoren.

Doch was tun, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht gleichgerichtet sind? Hierzu betrachte ich nochmals die Definition des Vektors D2.1. Ein Vektor ist hiernach eine Verschiebung eines Punktes. Wenn man zwei Vektoren addiert, so verschiebt man einen Punkt zuerst längs des einen und dann längs des anderen Vektors:

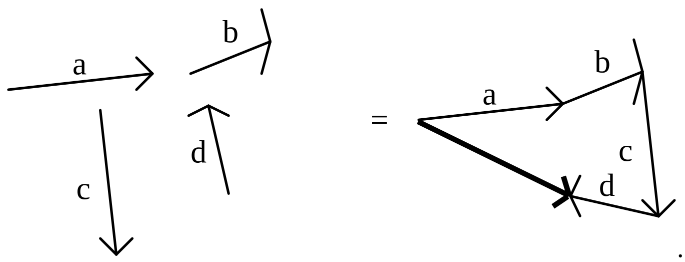


In der Grafik würde ein am Fuß von $\vec{b}$ sitzender Punkt bis zur Spitze von $\vec{b}$ im Koordinatensystem verschoben. Der zu diesem verschobenen Punkt hinbewegte Vektor $\vec{a}$ verschiebt den Punkt zur Spitze von $\vec{a}$. Die Verschiebung über die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich der direkten Verschiebung vom Fuß von $\vec{b}$ zur Spitze von $\vec{a}$, in der Grafik dünn eingezeichnet. Der dünn gezeichnete Vektor ist die Summe der Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

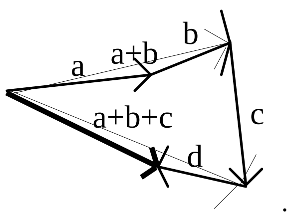
<u>D2.4 *(Vektoraddition)*:</u> Zwei Vektoren, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt, werden addiert, wenn der Fuß von $\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$ gelegt wird. Der Vektor vom Fuß von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$ ist dann die Summe der beiden Vektoren. Es gilt das Kommutativgesetz[2]: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Sollen mehrere Vektoren, hier $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ genannt, addiert werden, so beginne man mit $\vec{a}$ und füge den Fuß von $\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$, genau, wie bei der Vektoraddition bei D2.1. Man fügt An die Spitze von $\vec{b}$ wird der Vektor $\vec{c}$ angesetzt, an die Spitze von $\vec{c}$ der Fuß von $\vec{d}$. Der Vektor, der beim Fuß von $\vec{a}$ beginnt und bei der Spitze des letzten Vektors $\vec{d}$ aufhört ist der Ergebnisvektor aus der Addition von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$:



Die Begründung für diese Vorgehen ergibt sich, wenn man die Ergebnisvektoren aus den jeweiligen Additionen Einzeichnet:



Es zeigt sich, das man die Addition mehrere Pfeile auf die Addition zweier Vektoren zurückführen kann. Als Beispiel läßt sich die Addition des Vektors $\vec{c}$ zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ anführen. Hier kann man sich denken, daß zuerst $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert werden, und zu dem resultierenden Vektor $\vec{a}+\vec{b}$ der Pfeil $\vec{c}$ summiert wird.

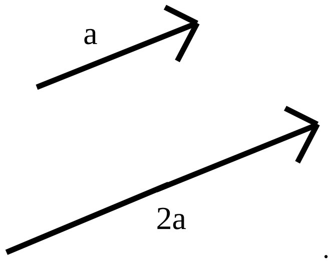
---

[2]Kommutativgesetz, die Reihenfolge der Ausgangsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spielt bei der Addition keine Rolle, Die Addition fürt zum gleichen Ergebnis.

D2.5 *(Multiple Addition)*: Möchte man die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ aufsummieren, so bildet man eine Kette aus den Vektoren, wobei immer der Fuß des Nachfolgers an der Spitze des Vorgängers ansetzt. Das Ergebnis der Addition ist dann der Vektor, der vom Fuß des ersten Vektors zur Spitze, des als letzten aufsummierten, reicht.

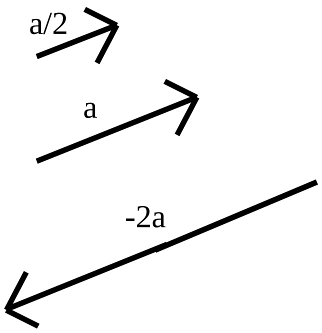
Skalare-Multiplikation

Bisher wurde ein Vektor nur über die Addition verändert. Nun möchte ich die sogenannte Skalare-Multiplikatikon einführen, die den Betrag und gegebenenfalls die Richtung eines Vektor ändert. Möchte man den Betrag des Vektors $\vec{a}$ verdoppeln, so multipliziere man ihn mit zwei:



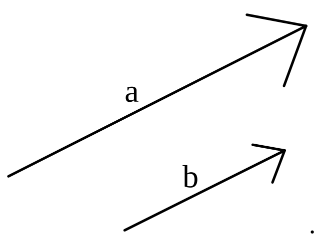
Eine Veranschaulichung diese Verfahrens, setzt wieder beim Verschiebungsbegriff an. Die Multiplikation eines Vektors ist nichts anderes als die Veränderung der Verschiebung. Sie wird vergrößert oder verkleinert, auch die Richtung kann in ihr Gegenteil verkehrt werden, trotzdem bleiben alle Vektoren, die man aus ein und dem selben durch Skalare-Multiplikation erzeugen kann **kollinear**, daß heißt sie liegen auf einer Geraden.
Multipliziert man den Vektor $\vec{a}$ mit -2, so hat er den gleichen Betrag, wie bei einer Multiplikation mit 2, doch ist genau entgegengesetzt gerichtet zu ihm. Man bezeichnet den Vektor $-2 \cdot \vec{a}$ als den Gegenvektor zu $2 \cdot \vec{a}$. Eine Multiplikation mit 0 führt zu einem richtungslosen Punkt ohne Ausdehnung, dem Nullvektor: $\vec{0}$. Zusammengefaßt ergibt das:

D2.6 *(Skalare-Multiplikation)*: Die Länge und gegebenenfalls die Richtung eines Vektors verändert man durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl λ. Es sind drei Fälle möglich: Die Zahl ist größer als 0, dann wird die Länge des Vektors mit der Zahl multipliziert, das Ergebnis ist dann der neue Betrag des Pfeils. Ist die Zahl 0, so ist das Ergebnis der Nullvektor. Bei negativem λ dreht sich der Pfeil um, die neue Länge wird wie bei positivem λ berechnet.

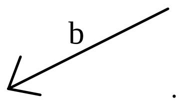


Subtraktionsverfahren

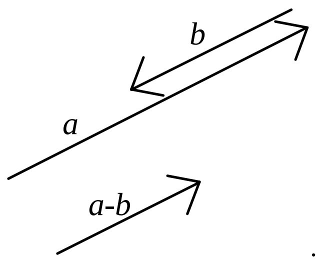
Ich möchte bei der Erläuterung der Subtraktion die Vorkenntnisse bei der Addition verwenden. Auch hier gibt es wieder den Spezialfall, das beide Vektoren kollinear sind. In diesem Fall



Was bedeutet nun Subtraktion. Nun in der Arithmetik ist die Subtraktion $a-b$ als Addition des -1 fachen der Zahl b definiert worden. Beispielsweise ist $6-5=6+(-5)=1$. Analog dazu definiert man die Vektorsubtraktion $\vec{a}-\vec{b}$ als Addition von $\vec{a}$ und dem Gegenvektor von $\vec{b}$, $-\vec{b}$: $\vec{a}+(-\vec{b})$. Der Gegenvektor zu $\vec{b}$ ist aber als Vektor definiert, welcher den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung zu $\vec{b}$ hat. Die oben gezeigten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen nun geometrisch addiert werden. Hierzu bilde ich zum Vektor $\vec{b}$ zuerst einmal den Gegenvektor $-\vec{b}$:



Da man die beiden Vektoren beliebig verschieben darf, gemäß D2.2, setze ich den Fuß von Vektor $-\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$ (hier etwas versetzt dargestellt):



Der Resultierende Repräsentant der Pfeilklasse $\vec{a}-\vec{b}$ reicht vom Fuß von $\vec{a}$ zur Spitze von $-\vec{b}$.

<u>D2.7</u> ***<u>(Subtraktion zweier kollinearer Vektoren)</u>*****<u>:</u>** Zwei kollineare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ subtrahiert man, indem man zu dem Subtrahenten den Gegenvektor $-\vec{b}$ bildet und eine Addition $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ gemäß D2.3 durchführt.

Wie bei diesem Spezialfall, so auch im allgemeinen:

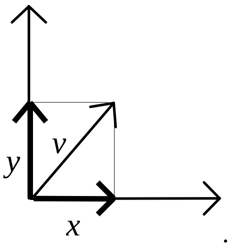
<u>D2.8</u> ***<u>(Subtraktion durch Addition mit vorhergehender Skalare-Multiplikation)</u>*****<u>:</u>** Die Subtraktion der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erreicht man, in dem man den zu subtrahierenden Vektor mit -1 multipliziert, siehe D2.6: $-\vec{b}$. Grafisch bedeutet das, daß Umdrehen des Vektors $\vec{b}$. Nun erfolgt eine gewöhnliche Addition, wie sie bereits unter D2.4 beschrieben wurde.

Auch hierbei gibt es eine Multiple Subtraktion:

<u>D2.9</u> ***<u>(Multiple Subtraktion)</u>*****<u>:</u>** Möchte man die Vektoren $\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ von dem Vektor $\vec{v}_1$ subtrahieren, so bildet man zu den Vektoren $\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ die entsprechenden Gegenvektoren $-\vec{v}_2,\ldots,-\vec{v}_n$. Nun erfolgt eine gewöhnliche multiple Addition nach D2.5.

Vektorzerlegung

Ein beliebiger Vektor der Ebene kann in genau zwei Komponenten zerlegt werden. Praktisch muß man sich nur eine gewünschte Komponente suchen und den anderen Vektor hierzu suchen, so daß die beiden neuen Vektoren addiert den gegebenen Vektor erzeugen. Ein Spezialfall ist die Verwendung zweier achsenparalleler senkrecht aufeinander stehender Komponenten. Diese beiden Vektoren können sehr einfach im Koordinatensystem erzeugt werden:



Wie aus der Grafik leicht ersichtlich ist $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$.

D2.10 *(Vektor-Zerlegung)*: Gerade in der Physik ist es häufig nötig einen Vektor $\vec{a}$ in zwei Komponenten $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu zerlegen, die addiert $\vec{a}$ ergeben. Dies ist grundsätzlich auf unendlich viele Arten machbar. In der Physik ist aber häufig ein Vektor bekannt, so daß der andere ermittelt werden kann. Es muß nur ein Vektorparallelogramm gezeichnet werden.

Vektorrechnung in der Physik

Ich komme nun zum Bindeglied zwischen Mathematik und Physik. Der im ganzen oberen Bereich beschriebene Vektor entspricht in der Physik dem Wegvektor. Dieser ist häufig frei verschiebbar. In der Physik treten aber auch sehr häufig Ortsvektoren auf, bei denen ja keinerlei Verschiebungen möglich sind. Kraftvektoren können auch nur begrenzt verschoben werden, nur „längs ihrer Wirkungslinie“. Häufig ist der oben beschriebene Begriff der Verschiebung nicht anwendbar. Dann gelten wirklich nur noch die Vektorgesetze, ohne, daß sich diese anschaulich zeigen lassen.