Dieses Dokument wurde von **Christian Buth** erstellt.

Es ist auf meinen Internetseiten unter

http://www.Christian.Buth.mysite.de

frei erhältlich.

Sollten Sie Probleme mit der Anzeige haben oder einen Fehler entdecken, wenden Sie sich bitte an

cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de .

§2 Additionstheoreme der Winkelfunktionen

M 2.1: *(Additionstheoreme der Winkelfunktionen)*

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

M 2.2: *(Umformung der Additionstheoreme)* Es sollen Gleichungen für $\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \tan 2\alpha,\ \cot 2\alpha$ hergeleitet werden.

$$
\begin{aligned}
&\sin 2\alpha \\
&= \sin(\alpha + \alpha) \\
&= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin a \\
&= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cos 2\alpha \\
&= \cos(\alpha + \alpha) \\
&= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \\
&= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \vee \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\
&= 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \vee 2 \cdot \cos^2\alpha - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tan 2\alpha \\
&= \tan(\alpha + \alpha) \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} \\
&= \frac{\tan^2\alpha}{1 - \tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\cot 2\alpha \\
&= \cot(\alpha+\alpha) \\
&= \frac{\cot\alpha \cdot \cot\alpha - 1}{\cot\alpha + \cot\alpha} \\
&= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cdot\cot\alpha}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1}{2\cdot\cot\alpha} \\
&= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot 2\cdot\cot\alpha} \\
&= \frac{\sin 2\alpha}{2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cot\alpha}
\end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \\
&\Leftrightarrow 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \\
&\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \\
&\Leftrightarrow 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \\
&\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

$$\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right)^2}}{1+\cos\alpha}$$