

Dieses Dokument wurde von **Christian Buth** erstellt.

Es ist auf meinen Internetseiten unter

<http://www.Christian.Buth.mysite.de>

frei erhältlich.

Sollten Sie Probleme mit der Anzeige haben oder einen

Fehler entdecken, wenden Sie sich bitte an

cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de .

© 2000 Christian Buth. Dieser Text ist nach allen nationalen und internationalen Regeln urheberrechtlich geschützt. Das Verändern und anschließende Veröffentlichen unter meinem Namen ist verboten – auch auszugsweise. Das Veröffentlichen und Verbreiten unter einem anderen als meinem Namen ist nicht erlaubt. Das Dokument kann für nichtkommerzielle Zwecke aber hemmungslos verbreitet und kopiert werden, sofern es unverändert bleibt. Kommerzielle Nutzung jeglicher Art – auch auszugsweise – ist nur nach Rücksprache gestattet.

§2 Additionstheoreme der Winkelfunktionen

M 2.1: (*Additionstheoreme der Winkelfunktionen*)

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$

M 2.2: (*Umformung der Additionstheoreme*) Es sollen Gleichungen für $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\cot 2\alpha$ hergeleitet werden.

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \vee \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha \vee 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} \\ &= \frac{\tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cot 2\alpha \\
 &= \cot(\alpha + \alpha) \\
 &= \frac{\cot \alpha \cdot \cot \alpha - 1}{\cot \alpha + \cot \alpha} \\
 &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cdot \cot \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned} & \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot 2 \cdot \cot \alpha} \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - \cos \alpha \\
 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 + \cos \alpha \\
 \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \right)^2}}{1 + \cos \alpha}$$