# §1 Quadratische Gleichungen

**M 1.1:** *(1. allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen)* Es wird eine Gleichung 2.-Grades angenommen, welche folgende Form hat: $ax^2 + bx + c = 0$. Durch die normalerweise verwendete quadratische Ergänzung wird diese Gleichung allgemein nach x aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}^{\,2}}{2a} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \vee x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet ob die Gleichung eine Lösung, D = 0, hat, zwei Lösungen, D > 0, hat oder ob sie in dem Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar ist, D < 0.

**M 1.2:** *(2. allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen)* Es wird eine Gleichung 2.-Grades angenommen, welche folgende Form hat: $x^2 + px + q = 0$. Durch die normalerweise verwendete quadratische Ergänzung wird diese Gleichung allgemein nach x aufgelöst:

$$x^2 + px + q = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} - (\frac{p^2}{4} - q) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^{\,2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}) \cdot (x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q})$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0 \vee x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \vee x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$ entscheidet ob die Gleichung eine Lösung, D = 0, hat, zwei Lösungen, D > 0, hat oder ob sie in dem Bereich der reellen Zahlen nicht Lösbar ist, D < 0.

**M 1.3:** *(Satz von Vieta)* Wenn man zwei Lösungen einer quadratischen Gleichung überprüfen möchte, so hat man folgende Möglichkeiten (für M 1.1 und M 1.2):

*Durch Addition der Lösungen:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -p$$

*Durch Multiplikation der Lösungen:*

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \cdot (-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q})$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - (\frac{p^2}{4} - q)$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = q$$

*Durch Addition der Lösungen:*

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b-b+\sqrt{b^2-4ac}-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

*Durch Multiplikation der Lösungen:*

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac}) \cdot (-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b^2 + b\cdot\sqrt{b^2-4ac} - b\cdot\sqrt{b^2-4ac} - (b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$$