Dieses Dokument wurde von **Christian Buth** erstellt.

Es ist auf meinen Internetseiten unter

http://www.Christian.Buth.mysite.de

frei erhältlich.

Sollten Sie Probleme mit der Anzeige haben oder einen Fehler entdecken, wenden Sie sich bitte an

cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de .

1 Einige Grundbegriffe

1.1 Die Mengenschreibweise

1.1.1 Mengen

„Definition 1.1 *(Cantor):*" Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter wohl unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (die *Elemente* genannt werden) zu einem Ganzen.

Definition 1.2: M, N Mengen,

N heißt *Teilmenge* von M: $N \subseteq M$ wenn für jedes $m \in N$ gilt $m \in M$.

$N_1, N_2 \subseteq M$ heißen *gleich*, wenn $N_1 \subseteq N_2$ und $N_2 \subseteq N_1$.

$\mathfrak{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$ heißt *Potenzmenge* von M.

$M \setminus N := \complement_M N := \{m \mid m \in M \wedge m \notin N\}$ heißt *Differenz* zwischen M und N oder *Komplement* von N in M.

$M \cup N = \{m \mid m \in M \vee m \in N\}$ heißt *Vereinigung* von M und N.

$M \cap N = \{m \mid m \in M \wedge m \in N\}$ heißt *Durchschnitt* von M und N.

Schreibweise: $\emptyset \neq I$ Menge, M_i Mengen für $i \in I$

$\bigcap\limits_{i \in I} M_i = \{m \mid \bigwedge\limits_{i \in I} m \in M_i\}$ Durchschnitt der M_i für $i \in I$.

$\bigcup\limits_{i \in I} M_i = \{m \mid \bigvee\limits_{i \in I} m \in M_i\}$ Vereinigung der M_i für $i \in I$.

Satz 1.1: A, B, C Mengen. Dann gelten

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(c) $A \cup B = B \iff A \subseteq B \iff A \cap B = A$
(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
(e) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
(f) $\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$

Anmerkung 1.1: A und B Mengen, dann gilt die Beziehung $\mathfrak{P}(A \cup B) = \mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B)$ *nicht.*

Definition 1.3: $\emptyset \neq I$ Menge, ein Mengensystem von Teilmengen M_i einer Menge M (für $i \in I$) heißt *Partition* oder *(disjunkte) Zerlegung von* M $:\Longleftrightarrow$

(1) $\bigwedge_{i \in I} M_i \neq \emptyset$
(2) $\bigcup_{i \in I} M_i = M$
(3) $\bigwedge_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j}} M_i \cap M_j = \emptyset$

1.1.2 Relationen

Definition 1.4: M, N Mengen $:\Longleftrightarrow$

$M \times N = \{(m,n) \mid m \in M \wedge n \in N\}$ *Paarmenge* oder *kartesisches Produkt* von M und N.

$R \subseteq M \times M$ heißt *Relation* auf M.

R heißt *reflexiv* $:\Longleftrightarrow \bigwedge_{m \in M} (m,m) \in R$.

R heißt *symmetrisch* $:\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{m,n \in M} (m,n) \in R \Longrightarrow (n,m) \in R \right)$.

R heißt *antisymmetrisch* $:\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{m,n \in M} (m,n) \in R \wedge (n,m) \in R \Longrightarrow m = n \in R \right)$.

R heißt *transitiv* $:\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{l,m,n \in M} (l,m) \in R \wedge (m,n) \in R \Longrightarrow (l,n) \in R \right)$.

R heißt *konnex* $:\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{m,n \in M} (m,n) \in R \vee (n,m) \in R \right)$.

R heißt *Äquivalenzrelation* $:\Longleftrightarrow$ R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

R heißt *Halbordnung* $:\Longleftrightarrow$ R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

R heißt *(totale) Ordnung* $:\Longleftrightarrow$ R Halbordnung und konnex ist.

Bemerkung 1.1: M Menge, $\emptyset \neq I$ Indexmenge, M_i für $i \in I$ Teilmengensystem von M. Dann sind gleichbedeutend:

(1) $\{M_i \mid i \in I\}$ bilden eine Partition von M.
(2) Durch $(m,n) \in R$ wird eine Äquivalenzrelation genau dann, wenn $\bigvee_{i \in I} m \in M_i \wedge n \in M_i$ gebildet.

Definition 1.5: M Menge, $n \in M$ Element

$K_n = \{m \mid (m,n) \in R\}$ heißt *Äquivalenzklasse* von n bezüglich der Relation R.

$m' \in K_n$ heißt *Vertreter (Repräsentant)* von K_n in M.

$\{K_n \mid n \in M\}$ heißt *Quotientenmenge* von M bezüglich R.

1.1.3 Abbildungen

Definition 1.6: M, N Mengen. Ein *Graph* G ist eine Teilmenge von $M \times N$ mit

(1) $\bigwedge_{m \in M} \bigvee_{n \in N} (m, n) \in G$

(2) $(m, n_1) \in G \wedge (m, n_2) \in G \Longrightarrow n_1 = n_2$

Die zugehörige *Abbildung* ist

$$f = f_G : \begin{array}{l} M \to N \\ m \mapsto n =: f(m) \end{array}$$

für $(m, n) \in G$.

$f(M)$ heißt *Bild* von M, $f(M) := \{f(m) \mid m \in M\} \subseteq N$ heißt *Bildmenge* von f.

$n \in N$, $M_n := \{m \in M \mid f(m) = n\}$ heißt *Urbildmenge* von n (eventuell leer).

$m \in M_n$ heißt *Urbild* von n (*nicht* eindeutig bestimmt!)

Eine Abbildung f heißt *surjektiv* $:\Longleftrightarrow f(M) = N$, daß heißt $\bigwedge_{y \in N} \bigvee_{x \in M} f(x) = y$.

Eine Abbildung f heißt *injektiv* $:\Longleftrightarrow (f(m_1) = f(m_2) \Longrightarrow m_1 = m_2)$.

Eine Abbildung f heißt *bijektiv* $:\Longleftrightarrow$ f injektiv und f surjektiv.

Bemerkung 1.2: $f : M \to M$ Abbildung. Dann bildet $\{M_n \mid n \in f(M)\}$ eine Partition von M.

Definition 1.7: $g : L \to M$, $f : M \to N$ Abbildungen auf Mengen. Dann heißt $f \circ g : L \to N$, $l \mapsto f(g(l))$ das *Abbildungsprodukt* von g und f.

Bemerkung 1.3: Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ gibt. (g heißt dann *linksinvers* zu f)

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gibt. (g heißt dann *rechtsinvers* zu f)

(c) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gibt. (g heißt dann *invers* zu f)

Bemerkung 1.4: Das Abbildungsprodukt ist assoziativ, daß heißt für die Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h \circ g \circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\nRightarrow"] & D \\ B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Die Schreibweise $h \circ g \circ f$ ist möglich.

Bemerkung 1.5: $g : L \to M$, $f : M \to N$ Abbildungen. Dann gelten:

(a) $f \circ g$ surjektiv $\Longrightarrow$ f surjektiv

(b) $f \circ g$ injektiv $\Longrightarrow$ g injektiv

(c) $f \circ g$ bijektiv $\Longrightarrow$ f surjektiv und g injektiv

Satz 1.2: Eine Abbildung $f : M \to N$ läßt sich zerlegen in eine surjektive Abbildung $s : M \to \bar{M} := \{M_n \mid n \in f(M)\}$, $m \mapsto M_{f(m)}$ ($\bar{M}$ Urbildmenge), gefolgt von einer bijektiven Abbildung $\bar{f} : \bar{M} \to f(M)$, $M_n \mapsto n$ und einer injektiven Abbildung $i : f(M) \to N$, $n \mapsto m$ ($f(M) \subseteq N$).

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \bar{M} & \xrightarrow[\bar{f}]{} & f(M) \end{array}$$

1.2 Natürliche Zahlen, die Peano-Axiome

1.2.1 Die natürlichen Zahlen

Definition 1.8: Ein Tripel $\mathbb{N} = (N, 0, s)$ bestehend aus einer Menge N heißt *System natürlicher Zahlen*, wenn gelten:

($\mathbb{N}$1) $0 \in N$

($\mathbb{N}$2) $s : N \to N$ ist eine injektive Abbildung mit $0 \notin s(N)$

($\mathbb{N}$3) Besitzt eine Teilmenge $M \subseteq N$ die beiden Eigenschaften

(i) $0 \in M$

(ii) $s(M) \subseteq M$)

so ist $M = N$,

Satz 1.3: $\mathbb{N} = (N, 0, s)$, $\tilde{\mathbb{N}} = (\tilde{N}, \tilde{0}, \tilde{s})$ zwei Systeme natürlicher Zahlen. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $f : N \to \tilde{N}$ mit $f(0) = \tilde{0}$ und $\tilde{s} \circ f = f \circ s$.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{s} & N \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ \tilde{N} & \xrightarrow[\tilde{s}]{} & \tilde{N} \end{array}$$

1.2.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Bemerkung 1.6: $(N, 0, s)$ System natürlicher Zahlen, $\mathfrak{E}(n)$ sei Eigenschaft von n (Aussage für n). Gilt $\mathfrak{E}(0) \wedge (\mathfrak{E}(n) \Longrightarrow \mathfrak{E}(s(n)) \Longrightarrow \bigwedge_{n \in N} \mathfrak{E}(n)$.

Schreibweise: (ungenau) $\mathbb{N} = (N, 0, s)$ „Menge der natürlichen Zahlen mit Anfangselement 0 und Nachfolgeabbildung s“

Bemerkung 1.7: $(N, 0, s)$ System von natürlichen Zahlen. Dann gilt $\bigwedge_{n \in N} s(n) \neq n$.

Definition 1.9: $\mathbb{N} = (N, 0, s)$ System natürlicher Zahlen. $A \subseteq \mathbb{N}$ Teilmenge heißt *Anfangsstück (Abschnitt)* von $\mathbb{N} :\Longleftrightarrow (s(n) \in A \Longrightarrow n \in A)$ beziehungsweise $(n \notin A \Longrightarrow s(n) \notin A)$.

Bemerkung 1.8: $\mathbb{N} = (N, 0, s)$ System natürlicher Zahlen.

(a) $A \subseteq \mathbb{N}$ Anfangsstück, $A \neq \emptyset \Longrightarrow 0 \in A$
(b) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigvee\limits_{A} A$ Anfangsstück mit $n \in A$ und $s(n) \notin A$
(c) $A_n = \{1; \ldots; n\}$ Anfangsstück, $A_{s(n)} = A_n \cup s(n)$

1.2.3 Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen

Satz 1.4: Es sei $\mathbb{N} = (N, 0, s)$ ein System natürlicher Zahlen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto f(m, n) =: m + n \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

(A1) $\bigwedge\limits_{m \in \mathbb{N}} f(m, 0) = m + 0 = m$
(A2) $\bigwedge\limits_{m,n \in \mathbb{N}} f(m, s(n)) = s(f(m, n)) = m + s(n) = s(m + n)$

Definition 1.10: Die Abbildung f in Satz 1.4 heißt *Addition* auf $\mathbb{N}$, $s(0) =: 1$.

2 Vektorräume

2.1 Einführung in die Vektorräume

2.1.1 Definition eines Vektorraums

Definition 2.1: Es sei $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, der sogenannten *Addition*

$$V \times V \to V, \;\; (v, w) \mapsto v + w$$

bezüglich der V eine kommutative Gruppe bildet und der sogenannten *skalaren Multiplikation*

$$K \times V \to V, \;\; (a, v) \mapsto a \cdot v$$

die folgenden Regeln erfüllt

(SM1) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
(SM2) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
(SM3) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
(SM4) $1 \cdot v = v$

heißt ein *Vektorraum* (*linearer Raum*) über $\mathbb{K}$.

Beispiel 2.1:

(1) $0 = (0, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und heißt *Nullraum*.
(2) $\mathbb{K}$ Körper, $(K, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum bezüglich der Addition und Multiplikation in $\mathbb{K}$.
(3) $\mathbb{C}$ Körper der komplexen Zahlen. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird ein Vektorraum mit

$$\begin{aligned} + : \;& \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & ((x, v), (y, u)) \mapsto (x, u) \underset{\mathbb{C}}{+} (y, v) := (x + y, u + v) = (x + y) + i(u + v) \\ \cdot : \;& \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & (a, (x, y)) \mapsto a \cdot (x, y) := (a, 0) \underset{\mathbb{C}}{\cdot} (x, y) = (a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot x + i \cdot a \cdot y \end{aligned}$$

Satz 2.1: M sei eine Menge, $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann bildet die Menge $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{K}) =: \mathbb{K}^M$ der Abbildungen $f : M \to \mathbb{K}$ von M in $\mathbb{K}$ mit der Addition

$$+ : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^M \to \mathbb{K}^M, \ (f, g) \mapsto f + g$$

mit $\bigwedge\limits_{x \in M} (f + g)(x) = f(x) \underset{\mathbb{K}}{+} g(x)$ und der skalaren Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^M \to \mathbb{K}^M, \ (a, f) \mapsto a \cdot f$$

mit $\bigwedge\limits_{x \in M} (a \cdot f)(x) = a \underset{\mathbb{K}}{\cdot} f(x)$ einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Beispiel 2.2:

(1) $M = \{1; \ldots; n\}$, $\mathbb{K}^M = \mathbb{K}^{\{1;\ldots;n\}} =: \mathbb{K}^n$ heißt *Standardvektorraum* über $\mathbb{K}$. $f \in \mathbb{K}^n$ ist gegeben durch $\big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big) =: (f_1, f_2, \ldots, f_n)$
Addition: $f + g = (f_1, \ldots, f_n) + (g_1, \ldots, g_n) = (f_1 + g_1, \ldots, f_n + g_n)$
Skalare Multiplikation: $a \underset{\mathbb{K}}{\cdot} f = a \cdot (f_1, \ldots, f_n) = (a \cdot f_1, \ldots, a \cdot f_n)$

(2) $M = \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt *Vektorraum der Folgen* über $\mathbb{K}$. $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist gegeben als $\big(f(0), f(1), \ldots\big) =: (f_0, f_1, \ldots) = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge. Addition und skalare Multiplikation wie in Beispiel 1.

Schreibweise: $a \in \mathbb{K}$ Skalar, $v, w \in V$ Vektoren.

Vektordifferenz: $v - w := v + (-w)$. „Skalare Division": $\frac{v}{a} := \frac{1}{a} \cdot v$. Neutrales Element bezüglich $+$ in V: $0_K \cdot v = 0_V$ (Nullvektor). Inverses Element zu $a \cdot v$ bezüglich $+$ in V: $-a \cdot v$.

2.1.2 Untervektorräume

Definition 2.2: Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, W sei eine Teilmenge von V. Wenn W mit $+\big|_W$ (eingeschränkt auf) und $\cdot\big|_W$ einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet, so heißt W *Unter(vektor)raum* (*Teilraum*) von V. In Zeichen $W \leq V$.

$\tau(V) := \{W \mid W \subseteq V \wedge W \text{ Unterraum von } V\}$ heißt *Menge der Teilräume* von V.

Bemerkung 2.1 *(Unterraumkriterium):* $(V, +, \cdot)$ sei Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Dann gilt für $W \subseteq V$:

$$W \leq V \iff \bigwedge_{v, w \in W} \bigwedge_{a \in \mathbb{K}} v + w \in W \wedge a \cdot v \in W.$$

Bemerkung 2.2: $\tau(V)$ ist durch „$\leq$" halbgeordnet.

2.1.3 Durchschnitte und Summen von Untervektorräumen

Bemerkung 2.3: V Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $W_i \leq V$ für $i \in I \neq \emptyset \Longrightarrow W := \bigcap\limits_{i \in I} W_i \leq V$ (*Schnittraum*).

Definition 2.3: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ Teilmenge (Vektoren)
$<S> := \bigcap\limits_{S \subseteq W \leq V} W$ heißt der von S *aufgespannte* (*erzeugte*) Vektorraum. Oder: $<S>$ ist die *lineare Hülle* (das *Erzeugnis*) von S.
Seien $W_i \leq V$ für $i \in I \neq \emptyset$, $S = \bigcup\limits_{i \in I} W_i$, dann heißt $<S> =: \sum\limits_{i \in I}' W_i$ *Summe* der W_i[1] (*Summenraum*).

Bemerkung 2.4: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten:

(a) $S \subseteq V$ Teilmenge $\Longrightarrow$ $<S> = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i v_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in \mathbb{K} \wedge v_i \in S \right\}$

(b) Seien $W_i \leq V$, $i \in I \neq \emptyset \Longrightarrow \sum\limits_{i \in I} W_i = \left\{ \sum\limits_{j \in J} w_j \;\middle|\; J \subseteq I \text{ endlich } \wedge w_j \in W_j \right\}$

Bezeichnung: $w = \sum\limits_{j \in J} = \sum\limits_{i \in I}' w_i$

Definition 2.4: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W_i \leq V$ für $i \in I \neq \emptyset$, $W \leq V$ heißt *direkte Summe* der W_i, in Zeichen $W = \bigoplus\limits_{i \in I} W_i$, falls

(1) $W = \sum\limits_{i \in I} W_i$

(2) $\bigwedge\limits_{i \in I} W_i \cap \left(\sum\limits_{i \neq j \in I} W_j \right) = 0$

gilt.

Satz 2.2: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W_i \leq V$ für $i \in I \neq \emptyset$, $W = \sum\limits_{i \in I} W_i$. Dann gilt:

$$W = \bigoplus_{i \in I} W_i \iff \bigwedge_{w \in W} \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{w_i \in W_i}^{1} w = \sum_{i \in I}' w_i .$$

2.1.4 Komplement eines Unterraums

Definition 2.5: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W \leq V$ Unterraum. $X \leq V$ heißt *Komplement* zu W, falls $V = W \oplus X$ ist.

Beispiel 2.3: $V = \bigoplus\limits_{i \in I} W_i \Longrightarrow X = \bigoplus\limits_{i \neq j \in I} W_j$ ist ein Komplement zu W_i.

[1] Die gestrichene Summe steht immer für eine *endliche* Summe. Das gleiche gilt für Produkte.

Definition 2.6: Eine halbgeordnete Menge $(M, \leq)$ heißt *induktiv geordnet*, falls es zu jeder totalgeordneten Teilmenge $N \subseteq M$ (geordnet durch „$\leq$“) (N „Kette“) ein $m \in M$ gibt mit $\bigwedge\limits_{n \in N} n \leq m$.

Ein Element $m \in M$ heißt *maximal*, falls $\bigwedge\limits_{m' \in M} m \leq m' \Longrightarrow m' = m$.

Beispiel 2.4: V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum, $\tau(V)$ halbgeordnet mit „$\leq$“. Sei $\{W_i \mid i \in I\}$ eine Kette. $W := \bigcup\limits_{i \in I} W_i$. $W \in \tau(V)$ und $\bigwedge\limits_{i \in I} W_i \leq W$. $\tau(V)$ ist induktiv geordnet.

Lemma 2.1 *(Zorn):* Jede induktiv geordnete Menge $M \neq \emptyset$ bestitzt ein maximales Element. (äquivalent zum Auswahlaxiom der Mengenlehre)

Satz 2.3: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W \leq V$. Dann existiert nach der Mengenlehre $X \leq V$ mit $V = W \oplus X$.

Satz 2.4: M enthält ein maximales Element X. $X \leq V$, $X \cap W = 0$.

Mengen	**Vektorräume**
M Menge	V Vektorraum
$N \subseteq M$ Teilmenge	$W \leq V$ Unterraum
$\bigcap\limits_{i \in I} N_i$ Durchschnitt	$\bigcap\limits_{i \in I} W_i$ Durchschnitt
$\bigcup\limits_{i \in I} N_i$ Vereinigung	$\sum\limits_{i \in I} W_i$ Summe
$\dot{\bigcup\limits_{i \in I}} N_i$ disjunkte Vereinigung	$\bigoplus\limits_{i \in I} W_i$ direkte Summe
$N \subseteq M$ $N \setminus M$ Komplement	$W \leq V \Longrightarrow \bigvee\limits_{X \leq V} V = W \oplus X$ Komplement

2.2 Lineare Abbildungen

2.2.1 Definition und einfache Eigenschaften linearer Abbildungen

Definition 2.7: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$ heißt *lineare Abbildung* (*Homomorphismus*) $:\Longleftrightarrow$

$$\bigwedge_{v,w \in V} \bigwedge_{a \in \mathbb{K}} \phi(v + w) = \phi(v) \underset{W}{+} \phi(w) \wedge \phi(a \cdot v) = a \underset{W}{\cdot} \phi(v) \quad (\Longrightarrow \phi(0_V) = 0_W)$$

$\mathrm{Kern}(\phi) := \overset{-1}{\phi}(\{0\}) = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$ heißt *Kern* von ϕ.

Bild$(\phi) := \phi(V)$ heißt *Bild* von ϕ. Eine $\begin{cases} \text{injektive} \\ \text{surjektive} \\ \text{bijektive} \end{cases}$ lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt $\begin{cases} \textit{Monomorphismus} \\ \textit{Epimorphismus} \\ \textit{Isomorphismus} \end{cases}$.

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ heißt *Endomorphismus*, wenn sie bijektiv ist *Automorphismus*.

$\phi : V \to W$ Isomorphismus, dann schreibt man $V \cong W$ (*isomorph*).

Bemerkung 2.5: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gelten:

(a) Bild$(\phi) \leq W$
(b) Kern$(\phi) \leq V$

Bemerkung 2.6: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gelten:

(a) ϕ surjektiv $\iff$ Bild$(\phi) = W$
(b) ϕ injektiv $\iff$ Kern$(\phi) = 0$
(c) ϕ bijektiv $\iff$ Bild$(\phi) = W \wedge$ Kern$(\phi) = 0$

Bemerkung 2.7: $\mathbb{K}$ Körper, V, W, X $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$, $\psi : W \to X$ lineare Abbildungen. Dann gelten:

(a) Das Abbildungsprodukt $\phi \circ \psi : V \to X$ ist eine lineare Abbildung.
(b) ϕ Isomorphismus $\Longrightarrow$ Die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : W \to V$ ist eine lineare Abbildung (sogar Isomorphismus).

2.2.2 Kongruenzrelationen und Faktorräume

Definition 2.8: V sei Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Äquivalenzrelation „$\equiv$" auf V heißt eine *Kongruenzrelation*

$$:\iff \bigwedge_{v,v' \in V} \bigwedge_{w,w' \in W} v \equiv v' \wedge w \equiv w' \Longrightarrow v + w \equiv v' + w'$$
$$\bigwedge_{v,v' \in V} \bigwedge_{a \in \mathbb{K}} v \equiv v' \Longrightarrow a \cdot v \equiv a \cdot v'$$

Bemerkung 2.8: V sei ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Dann gelten:

(a) $\equiv$ Kongruenzrelation auf $V \Longrightarrow W = \{v \in V \mid v \equiv 0\} \leq V$ und es gilt $v \equiv w \iff v - w \in W$.
(b) $W \leq V$ Unterraum. Dann definiert $v \equiv w :\iff v - w \in W$ eine Kongruenzrelation mit $W = \{v \in V \mid v \equiv 0\}$.

Schreibweise: „$\equiv$" heißt *Kongruenzrelation modulo* W: $v \equiv w \pmod W$.

Bemerkung 2.9: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W \leq V$, $\equiv$ sei Kongruenzrelation modulo $W \Longrightarrow$ Die Quotientenmenge $\bar{V} = V/_{\equiv}$ mit den Abbildungen

$$+ : \bar{V} \times \bar{V} \to \bar{V}, \ \ (\bar{v}, \bar{w}) \mapsto \bar{v} + \bar{w} := \overline{v + w}$$
$$\cdot : K \times \bar{V} \to \bar{V}, \ \ (a, \bar{v}) \mapsto a \cdot \bar{v} := \overline{a \cdot v}$$

wird ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Definition 2.9: Der Vektorraum $V/_{\equiv}$ heißt *Faktorraum* oder *Quotientenraum* von V nach W. Schreibweise: $V/_W$.

2.2.3 Der Homomorphiesatz

Satz 2.5: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$, lineare Abbildung. Dann gilt: $V/_{\mathrm{Kern}(\phi)} \cong \mathrm{Bild}(\phi)$.

Korollar 2.1: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Der Homomorphismus $\phi : V \to W$ läßt sich in einen Epimorphismus

$$\kappa : V \to \bar{V}, \ \ v \mapsto \bar{v} = v + \mathrm{Kern}(\phi)$$

gefolgt von einem Isomorphismus

$$\bar{\phi} : V/_{Kern(\phi)} \to \phi(V), \ \ \bar{v} = v + \mathrm{Kern}(\phi) \mapsto \phi(v)$$

und einem Monomorphismus

$$\iota : \phi(V) \to W, \ \ w \mapsto w$$

zerlegen.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ {}^{\kappa}\downarrow & & \uparrow^{\iota} \\ V/_{\mathrm{Kern}(\phi)} & \xrightarrow[\bar{\phi}]{} & \phi(V) \end{array}$$

2.2.4 Der Vektorraum der Homomorphismen

Definition 2.10: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

$\mathrm{Hom}(V, W) := \{\phi \mid \phi : V \to W$ lineare Abbildung$\}$ heißt *Menge der linearen Abbildungen* (Homomorphismen) von V nach W.

$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ heißt *Menge der linearen Selbstabbildungen* (Endomorphismen) von V.

$\mathrm{Aut}(V) = \{\phi \in \mathrm{End}(V) \mid \phi$ Isomorphismus$\}$ ist die Menge der bijektiven Selbstabbildungen.

$\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}(V)$ heißt allgemeine lineare Gruppe.

Definition 2.11: $\mathbb{K}$ Körper, $(V, +, \circ)$ $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt eine $\mathbb{K}$-*Algebra*, wenn es zusätzlich eine Abbildung

$$\circ : V \times V \to V, \ \ (v, w) \mapsto v \circ w,$$

genannt Produkt, gibt derart, daß $(V, +, \circ)$ einen Ring bildet und gilt

$$\bigwedge_{v,w \in V} \bigwedge_{a \in K} a \cdot (v \circ w) = (a \cdot v) \circ w$$

(Schreibweise: häufig „$\cdot$“ statt „$\circ$“.)

Bemerkung 2.10: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann gelten:

(a) $\mathrm{Hom}(V, W)$ mit „punktweise erklärter“ Addition und skalarer Multiplikation, daß heißt

$$+ : \mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W), \quad (\phi, \psi) \mapsto \phi + \psi$$

mit $\bigwedge_{v \in V} (\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v)$ und

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W), \quad (a, \phi) \mapsto a \cdot \phi$$

mit $\bigwedge_{v \in V} (a \cdot \phi)(v) := a \cdot \phi(v)$ bildet einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(b) $\mathrm{End}(V)$ bildet mit dem Abbildungsprodukt „$\circ$“ eine $\mathbb{K}$-Algebra.

(c) $\mathrm{GL}(V)$ bildet eine Gruppe: Die allgemeine lineare Gruppe (General linear group).

Beispiel 2.5: $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^2)$: $\mathbb{F}_2^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \Longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^2) \cong S_3$ nicht kommutativ! $\Longrightarrow$ $\mathrm{End}(V)$ ist im allgemeinen nicht kommutativ!

Mengen	**Vektorräume**
$f : M \to N$ Abbildung	$\phi : V \to W$ lineare Abbildung
f bijektive Abbildung	ϕ Isomorphismus
$\mathrm{Abb}(M, N) = N^M$	$\mathrm{Hom}(V, W)$
$\mathrm{Abb}(M, M) = M^M$	$\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{End}(V, W)$
Menge der Bijektionen auf M: S_M	$\mathrm{GL}(V)$
$\sim$ Äquivalenzrelation	$\equiv$ Kongruenzrelation (modulo W)
$\bar{M} = M/_\sim$ Quotientenmenge	$V/_\equiv = V/_W$ Faktorraum

2.3 Basis und Dimension

2.3.1 Basis endlich erzeugter Vektorraum

Definition 2.12: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum

$\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ Teilmenge, so heißt $v \in V$ *Linearkombination* der $v_1, \ldots, v_n$, falls es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, so daß $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$. Man sagt auch v läßt sich aus den $v_1, \ldots, v_n$ *linear kombinieren.*

$S \subseteq V$ heißt *linear unabhängig* (*frei*) $:\Longleftrightarrow \bigwedge\limits_{v \in S} \bigwedge\limits_{a_v \in \mathbb{K}} \sum\limits_{v \in S}' a_v v = 0 \Longrightarrow \bigwedge\limits_{v \in S} a_v = 0.$[2]

$S \subseteq V$ heißt *linear abhängig* (*unfrei*) $:\Longleftrightarrow S$ ist nicht linear unabhängig, daß heißt $\bigvee\limits_{0 \neq a_v \in \mathbb{K}} \sum\limits_{v \in S}' a_v v = 0$

$S \subseteq V$ Teilmenge heißt *Erzeugendensystem* von $V :\Longleftrightarrow V = <S>$, daß heißt V wird durch S aufgespannt.

V heißt *endlich erzeugt* $:\Longleftrightarrow V$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem.

$S \subseteq V$ heißt *Basis* von $V \Longleftrightarrow S$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Definition 2.13: $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ endliche Teilmenge

S ist ein *minimales Erzeugendensystem* $:\Longleftrightarrow S$ ist ein Erzeugendensystem und $\bigwedge\limits_{t \in S} S \setminus \{t\}$ ist kein Erzeugendensystem.

S ist ein *maximales linear unabhängiges System* $:\Longleftrightarrow S$ ist linear unabhängig und $\bigwedge\limits_{t \in V} S \cup \{t\}$ ist linear abhängig.

Ein $v \in V$ besitzt über S eine eindeutige Darstellung als Linearkombination $:\Longleftrightarrow$ $\bigwedge\limits_{s \in S} \overset{1}{\bigvee\limits_{a_s \in \mathbb{K}}} v = \sum\limits_{s \in S} a_s s.$

Satz 2.6 *(Charakterisierungssatz einer Basis):* $\mathbb{K}$ Körper, V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ endliche Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(a) S ist eine Basis
(b) S ist ein minimales Erzeugendensystem
(c) S ist ein maximales linear unabhängiges System
(d) Jedes $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination über S

Korollar 2.2: Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

Anmerkung 2.1: Satz 2.6 bleibt richtig für nicht endlich erzeugte Vektorräume, falls man $\sum$ durch $\sum'$ ersetzt.

2.3.2 Dimension endlich erzeugter Vektorräume

Satz 2.7 *(Basisergänzungssatz):* $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \subseteq V$ endliche linear unabhängige Teilmenge, $S \subseteq V$ endliches Erzeugendensystem, dann $\bigvee\limits_{U \subseteq S} B := T \cup U$ ist Basis von V.

[2] Bei Linearkombinationen sind, bis auf endlich viele Ausnahmen, alle Summanden Null.

Satz 2.8: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \subseteq V$ endliche linear unabhängige Teilmenge, $S \subseteq V$ endliches Erzeugendensystem $\Longrightarrow \#T \leq \#S$.

Korollar 2.3: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum $\Longrightarrow$ Alle Basen von V haben die gleiche Länge (Zahl der Elemente).

Definition 2.14: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt die Länge (Elementanzahl) einer (jeden) Basis von V die *Dimension* von V: $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim V$.

Beispiel 2.6: Für den Standardvektorraum gilt $V = \mathbb{K}^n \Longrightarrow \dim V = n$. Auf endlichen Körpern ist die Zahl der Vektoren des Standardvektorraums $V = \mathbb{K}^n$ und $\#K = q \in \mathbb{N} \Longrightarrow \#V = q^n$.

2.3.3 Der Isomorphiesatz

Satz 2.9: $\mathbb{K}$ Körper, V, W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ Basis von V, $T = \{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq W$. Dann $\overset{1}{\underset{\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)}{\forall}} \bigwedge_{i=1}^{n} \phi(s_i) = t_i$.
Dabei gelten:

(a) ϕ surjektiv $\iff T$ Erzeugendensystem von W
(b) ϕ injektiv $\iff T \subseteq W$ linear unabhängig
(c) ϕ bijektiv $\iff T$ Basis

Satz 2.10 *(Isomorphiesatz):* $\mathbb{K}$ Körper, V, W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann gilt:

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

Anmerkung 2.2: V nicht endlich erzeugt: $\dim V = \infty$ (Dimension unendlich). Dann gilt der Isomorphiesatz nicht, daß heißt $\dim V = \infty = \dim W \not\Longrightarrow V \cong W$.

Satz 2.11: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten:

(a) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$
(b) $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

Korollar 2.4: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W_i \leq V$ Unterräume für $i \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow$

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i.$$

Satz 2.12: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W \leq V$ Unterraum $\Longrightarrow$

$$\dim V/_{W} = \dim V - \dim W.$$

Korollar 2.5: $\mathbb{K}$ Körper, V, W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung $\Longrightarrow$

(a) $\dim(\phi(V)) = \dim V - \dim(\mathrm{Kern}(\phi))$
(b) $\dim V = \dim W$, dann gilt ϕ surjektiv $\iff$ ϕ injektiv

Definition 2.15: $\mathbb{K}$ Körper, V, W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung

$\dim(\phi(V))$ heißt *Rang* von ϕ: $\mathrm{Rang}(\phi)$.

$\dim(\mathrm{Kern}(\phi))$ heißt *Defekt* von ϕ: $\mathrm{Def}(\phi)$.

2.3.4 Der allgemeine Basissatz

Bemerkung 2.11: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ Teilmenge. Dann gilt: S linear unabhängig $\iff$

$$\Big(\bigwedge_{T \subseteq S} \#T\ (T \text{ endlich}) \Longrightarrow T \text{ linear unabhängig}\Big).$$

Satz 2.13: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Beispiel 2.7: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Also besitzt $\mathbb{R}$ eine Basis über $\mathbb{Q}$!

2.4 Koordinatendarstellung

2.4.1 Koordinaten und Basiswechsel

Definition 2.16: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $v \in V$ ein Vektor $\Longrightarrow \underset{a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{K}}{\overset{1}{\bigvee}} \quad v = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$

$a_1, \ldots, a_n$ heißen *Koordinaten* von v bezüglich der geordneten Basis S.

$v_S := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ ($\cong \mathbb{K}^n$) heißt *Koordinatenvektor* von v bezüglich S.

$\gamma_S : V \to \mathbb{K}^{n \times 1},\ v \mapsto v_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ heißt *Koordinatendarstellung* von V bezüglich geordneter Basis S.

Anmerkung 2.3: γ_S ist Isomorphismus.

Bemerkung 2.12: $\mathbb{K}$ Körper, V endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit Basen $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ und $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Dann gilt:

(a) $\bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{c_{ij} \in \mathbb{K}} s_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot t_i \wedge \bigvee_{c'_{ij} \in \mathbb{K}} t_j = \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} \cdot s_i$

(b) $v \in V$ mit $\gamma_S(v) = v_S = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \gamma_T(v) = v_T = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} v'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot v_j$

und $v_i = \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} \cdot v'_j$.

(c) $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot c'_{jk} = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} \cdot c_{jk} \qquad ; \; 1 \leq i, k \leq n.$

Definition 2.17: $\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = (c_{ij}) = C_{T,S}$ heißt *Basiswechselmatrix* von S nach T.

$\mathbb{K}^{m \times n} = \left\{ A \;\middle|\; A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \wedge a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$ heißt Menge der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}^{m \times n} \cong \mathbb{K}^{m \cdot n}$ $\mathbb{K}$-Vektorraum.

$A = (a_{ij}), B = (b_{jk}) \Longrightarrow$

$\mathbb{K}^{l \times m} \times \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}^{l \times n}, \;\; (A, B) \mapsto A \cdot B := \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}}_{c_{ik}} \Bigg)_{\substack{i=1,\ldots,l \\ k=1,\ldots,n}}$ heißt *Matrizenprodukt* von A und B.

Schreibweise: In Bemerkung 2.12 Teil (b) $v_T = c_{T,S} \cdot v_S \wedge v_S = C_{S,T} \cdot v_T$ mit $C_{S,T} = (c'_{ij})$. In Teil (c) $C_{T,S} \cdot C_{S,T} = (\delta_{ij}) = C_{S,T} \cdot C_{T,S}$, daß heißt $C_{S,T} = C_{T,S}^{-1}$ (bezüglich dem Matrizenprodukt)

2.4.2 Die Matrix einer linearen Abbildung

Definition 2.18: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimensionen m beziehungsweise n, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ Basis von V, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ Basis von W, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung.

$$\phi(s_j) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \cdot t_i \Longrightarrow \; D_{T,S}(\phi) := (d_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} \in \mathbb{K}^{n \times m}.$$

heißt *Darstellungsmatrix* von ϕ bezüglich Basen S und T.

$D_{T,S} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathbb{K}^{n \times m}, \;\; \phi \mapsto D_{T,S}(\phi)$ heißt *Darstellung* von $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezüglich S und T.

Anmerkung 2.4: $C_{T,S} = D_{T,S}(\mathrm{id}_V)$

Satz 2.14: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimensionen m beziehungsweise n, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ Basis von V, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ Basis von W, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung $\Longrightarrow$

$$D_{T,S} : \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{n \times m}, \quad \phi \mapsto D_{T,S}(\phi)$$

ist ein Isomorphismus.

Korollar 2.6: Unter Voraussetzung von Satz 2.14 gilt $\dim\left(\mathrm{Hom}(V, W)\right) = \dim V \cdot \dim W$.

Bemerkung 2.13: $\mathbb{K}$ Körper, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimensionen m beziehungsweise n, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ Basis von V, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ Basis von W, $\phi : V \to W$ lineare Abbildung, $v \in V$, $v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \cdot s_j$, $v_S := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, $\phi(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j \cdot t_j$, $w_T = \left(\phi(v)\right)_T = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} w_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \cdot v_j \text{ beziehungsweise } w_T = D_{T,S}(\phi) \cdot v_S.$$

2.4.3 Das Matrizenprodukt

Satz 2.15: $\mathbb{K}$ Körper, V, W, X endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen S, T, und U, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(W, X)$ lineare Abbildungen $\Longrightarrow$ $D_{U,S}(\psi \circ \phi) = D_{U,T}(\psi) \cdot D_{T,S}(\phi)$.

Korollar 2.7: $\mathbb{K}$ Körper, V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $S, \tilde{S}$ Basen von V, $T, \tilde{T}$ Basen von W, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineare Abbildung $\Longrightarrow$ $D_{\tilde{T},\tilde{S}}(\phi) = C_{\tilde{T},T} \cdot D_{T,S} \cdot C_{S,\tilde{S}}$ mit $C_{\tilde{T},T} = C_{T,\tilde{T}}^{-1}$.

Satz 2.16: $\mathbb{K}$ Körper. Dann gelten:

(a) Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ der $n \times n$ Matrizen bildet, bezüglich dem Matrizenprodukt, eine $\mathbb{K}$-Algebra.
(b) Die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen bildet, bezüglich dem Matrizenprodukt, eine Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2.4.4 Rang und Ähnlichkeit von Matrizen

Definition 2.19: $\mathbb{K}$ Körper
$A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, dann heißt A *äquivalent* zu B $(A \sim B)$ $:\Longleftrightarrow \bigvee\limits_{C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})} \bigvee\limits_{T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} A = C \cdot B \cdot T$.

$A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann heißt A *ähnlich* zu B $(A \approx B) :\Longleftrightarrow \bigvee\limits_{C\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} A = C^{-1} \cdot B \cdot C$.

Anmerkung 2.5: Ähnlichkeit und Äquivalenz von Matrizen sind Äquivalenzrelationen.