Dieses Dokument wurde von **Christian Buth** erstellt.

Es ist auf meinen Internetseiten unter

http://www.Christian.Buth.mysite.de

frei erhältlich.

Sollten Sie Probleme mit der Anzeige haben oder einen Fehler entdecken, wenden Sie sich bitte an

cbuth@ix.urz.uni-heidelberg.de .

§2 Geradlinige gleichförmige Bewegung

2.0 Einführung und Struktur des Lehrbriefes

Behandelte Themen in dieser Einheit:

- Modellvorstellung Massenpunkt
- Mathematische Beschreibung von Bewegungen durch Bezugsysteme
- Geschwindigkeit der geradlinigen gleichförmigen Bewegung
- Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit Diagramme
- Der Weg als Fläche unter dem Geschwindigkeits-Zeit-Graphen
- Die Geschwindigkeit als Quotient aus Weg- und Zeitdifferenzen
- Zeit-Weg-Funktion mit Anfangswert

2.1 Massenpunkt und Bezugssystem

Meist reicht es bei der Untersuchung von Bewegungen aus, nur einen Punkt (etwa seinen Schwertpunkt) eines ausgedehnten materiellen Körpers zu betrachten und ihm Eigenschaften wie Masse oder Ladung zuzuordnen. Durch diesen Abstraktionsschritt sind Bewegungsabläufe einfacher und klarer erfass- und beschreibbar. Der Körper wird gedanklich durch das **Modell des Massenpunktes** ersetzt.
Bei einem Läufer, der ja neben der Fortbewegung noch mit den Armen schlenkert, ist es sinnvoll den **Bezugspunkt** dort zu platzieren, wo, außer der zu beobachtenden Bahnbewegung, keinerlei Zusatzbewegungen stattfinden, also in diesem Fall nicht an den Armen oder Beinen, weil der Massenpunkt nur, Ideal gedacht, das zu untersuchende Phänomen beschreiben soll.
Eine weitere Notwendigkeit um Bewegungen beschreiben zu können ist die Festlegung eines Bezugskörpers mit einem fest verbundenen Koordinatensystem. Diese Kombination bilden das **Bezugssystem**, dem gegenüber die Bewegung beschrieben wird.

D2.1 *(Bewegung)*: Bewegung ist die Veränderung des Ortes eines Körpers mit der Zeit relativ zu einem Bezugsystem.

2.2 Geschwindigkeit bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung

Aus der Erfahrung ist bekannt, das eine Bewegung nach D2.1 schneller oder langsamer erfolgen kann. Unter Schnelligkeit oder Geschwindigkeit dieses Ablaufes versteht man die Zeit, die dafür benötigt wird. Ist diese beim gleichen Vorgang im einen Fall größer, als im anderen, so sagt man der erste Ablauf war schneller, als der andere. Eine Beschränkung auf die Geschwindigkeit, mit der sich ein Körper bewegt, ist nicht notwendig. Eine Definition von speziellen Geschwindigkeiten findet man häufig in der Mechanik und sogar in der Chemie existiert die sogenannte *Reaktionsgeschwindigkeit*. Wir werden noch mehrere im Laufe dieses Kurses durch die Physik kennen lernen.
Unter der Geschwindigkeit, in der Mechanik, mit der sich ein Körper fortbewegt, versteht man die Größe der Strecke, die er in einer Zeiteinheit, beispielsweise einer Sekunde, zurücklegt. Man kann nun die Schnelligkeit quantifizieren, denn ein anderer Körper bewegt sich doppelt so schnell, wenn er den gleichen Weg in der halben Zeit oder den doppelten Weg in der gleichen Zeit zurücklegt. Überlässt man die oben genannten Körper für zwei Zeiteinheiten sich selbst, so legen sie auch den doppelten Weg zurück, als wenn sie sich nur eine Zeiteinheit lang bewegt hätten. Dieser leicht ersichtliche Tatbestand führt einen zu dem Schluss, dass Weg *s*[1] und Zeit *t*[2] zueinander direkt proportional sind, eine Änderung der einen Größe zieht eine direkte Änderung der zweiten nach sich: $s \sim t$.

---

[1] *s* spatium (lat.), Schritt, Weg
[2] *t* tempus (lat.), Zeit

Man definiert: $v = \frac{s}{t} = const.$ Das Formelzeichen v[3] ist die Proportionalitätskonstante und erhält den Namen **Geschwindigkeit**. Diese Beziehung gilt aber nur, wenn die Größen auch wirklich proportional zueinander sind, der Quotient die ganze betrachtete Zeit über konstant ist, auch bei noch so kleinen oder großen Zeiten und den dazugehörigen Wegen. Die Konstanz des Quotienten ist das entscheidende Kriterium für das Attribut: **gleichförmig**, bei der Betrachtung von Bahnbewegungen.

D2.3 *(gleichförmige Bewegung)*: Bei einer gleichförmigen Bewegung ist der Betrages des Geschwindigkeitsvektors, über dem betrachteten Zeitintervall, konstant. Der Vektor darf seine Richtung ändern, beispielsweise bei der gleichförmigen Kreisbewegung: $v = const.$.

Anders gesagt ist der Quotient aus dem Betrag des Wegvektors und Zeit ist über dem gesamten betrachtete Intervall konstant. Der obige Fall ist sehr selten, häufig ein Ideal. Das Gegenteil der gleichförmigen Bewegung ist die **ungleichförmige Bewegung** die eine Veränderung von v beinhaltet. Bisher habe ich nur den Betrag des Geschwindigkeitsvektors berücksichtigt. Das Attribut **geradlinig** weist auf eine Konstanz der Richtung der Bewegung hin.

D2.4 *(geradlinige Bewegung)*: Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Richtung des Geschwindigkeitsvektors, , über dem betrachteten Zeitintervall, konstant. Der Vektor darf seinen Betrag ändern, beispielsweise bei der geradlinigen konstant beschleunigten Bewegung: $\vec{v}^0 = const.$.

Die Geschwindigkeit ist eine **abgeleitete physikalische Größe**, da sie von den beiden Basisgrößen Weg und Zeit abstammt. Die SI-Einheit des Weges ist der Meter: $[s] = 1\,\mathrm{m}$, und die SI-Einheit der Zeit ist die Sekunde: $[t] = 1\,\mathrm{s}$. Die Einheit der Geschwindigkeit ermittelt sich zu:

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Im Alltag verwendet man jedoch häufiger die Einheit $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, deren Umwandlung in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ich ja schon ausführlich unter [§1.6] durchgeführt habe: $\left(1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 3{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$.

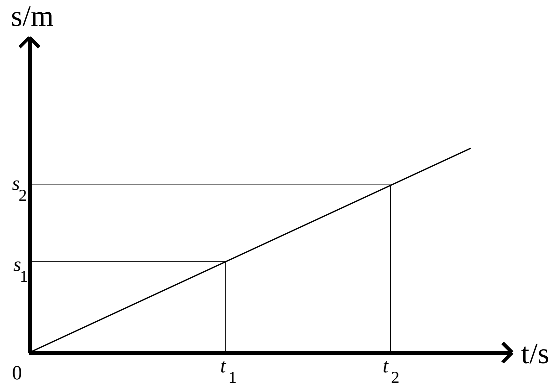
2.3 Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

Wenn sich ein Körper geradlinig gleichförmig bewegt und man den Weg auf der **Ordinate**[4], nun Wegachse genannt, und die Zeit auf der **Abszisse**[5], nun Zeitachse genannt, aufträgt, so erhält man beispielsweise folgenden, als **Weg-Zeit-Diagramm** bezeichneten, Graphen:

[3] v velocitas (lat.), Geschwindigkeit

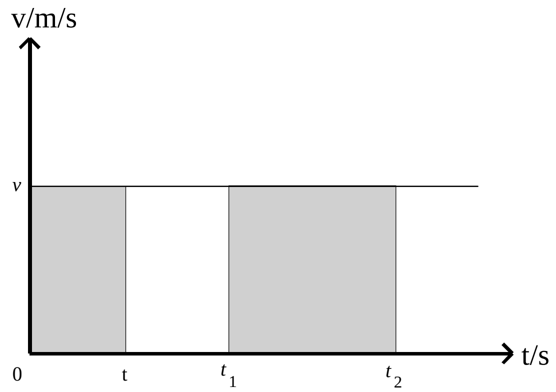
[4] Ordinate, allgemeine Bezeichnung für die y-Achse (das y ist durch das Formelzeichen der jeweilig verwendete physikalische Größe zu ersetzen, hier s-Achse).

[5] Abszisse, allgemeine Bezeichnung für die x-Achse (das x ist durch das Formelzeichen der jeweilig verwendete physikalische Größe zu ersetzen, hier t-Achse).



Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm) .

Einen weiterer Diagrammtyp ist das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm**, welches die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Da die Geschwindigkeit bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung konstant ist, handelt es sich bei dem Funktionsgraphen um eine Parallele zur Abszisse:



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (v-t-Diagramm) .

Wie sieht nun eine graphische Repräsentation des Weges im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm aus? Im Weg Zeitdiagramm konnte man den Weg einfach an der Weg-Achse ablesen, dass geht hier aber nicht, da auf der Ordinate nicht der Weg abgetragen wird, sondern die Geschwindigkeit. Wenn man die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ nach *s* auflöst, so erhält man den zurückgelegten Weg, den der Körper, der mit der Geschwindigkeit *v* eine Zeit *t* lang durch die Gegend fliegt, zurücklegt: $s = v \cdot t$. Diese Gleichung wird auch als **Weg-Zeit-Gesetz** der geradlinigen gleichförmigen Bewegung bezeichnet. Wenn man sich die Gleichung genauer ansieht, so wird auffallen das es sich hierbei um die Bestimmung des Flächeninhaltes des Rechteckes, das im Nullpunkt beginnt und bis zum Punkt (s / t) reicht und grau unterlegt ist. Die Fläche unter dem Funktionsgraphen von *v* ist somit der gesuchte Weg *s*, denn $A = a \cdot b$ gleicht $s = v \cdot t$. Allgemein halten wir fest:

S2.1 *(Flächensatz)*: Die von dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über einem Zeitintervall eingeschlossene Fläche ist der in diesem Intervall zurückgelegte Weg: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

2.4 Definition der Geschwindigkeit über Weg- und Zeitdifferenzen

Auf welchen Weise kann man den Weg, welcher unser hoch geschätzter Experimentierkörper zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 zurücklegt, ermitteln? (siehe Weg-Zeit-Diagramm und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm) Wenn man nun den Weg, den der Körper in der Zeit t_2 zurück legt einfach von dem abzöge, den

er bis t_1 hinter sich gebracht hat, dann ergäbe sich das gesuchte Wegstück, auch Wegdifferenz oder Wegabschnitt genannt. Anders gesagt, der Weg, den der Körper zwischen den beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 zurücklegt wird durch den Flächeninhalt zwischen den beiden Zeiten und dem Funktionsgraphen, der Parallelen zur Zeitachse im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, dargestellt. Dieser Bereich ist grau unterlegt.
Die Flächeninhalte oder, anderes gesagt, die Wegstücke erhält man durch das Weg-Zeit-Gesetz der geradlinigen gleichförmigen Bewegung. Sie beginnen jeweils bei 0. Die Subtraktion der kleineren Fläche, die von 0 bis t_1 reicht, von der größeren Fläche, die von 0 bis t_2 reicht, ergibt das gesuchte Flächen- beziehungsweise Wegstück: $s_2 - s_1 = v \cdot t_2 - v \cdot t_1$. Die Größe v kann man ausklammern und man erhält: $s_2 - s_1 = v \cdot (t_2 - t_1)$. Die Differenz zweier Werte ist aber als $\Delta s = s_2 - s_1$ (großer griechischer Buchstabe Delta) definiert worden, wobei man den nachfolgenden Wert, von dem vorausgehenden abzieht. Die Differenz kann auch negativ sein, z. B. wenn der Wagen wieder zurück fährt (weiteres zum Delta Operator im Anhang D). Mit dieser neuen Schreibweise erscheint die Gleichung in allgemeiner Form: $\Delta s = v \cdot \Delta t$. Die Division des Wegabschnitts durch den Zeitabschnitt führt uns zu einer neuen Definitionsgleichung für die Geschwindigkeit: $v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.
Physikalisch bedeutet das, dass der Quotient aus Wegänderung und Zeitänderung die Geschwindigkeit ergibt. Wenn sich der Körper t Sekunden mit der Geschwindigkeit v bewegt hat, so legte er s Meter zurück. Ob der Bewegungsvorgang nun ganz zu anfangs so statt fand, oder erst nach einer bestimmten Zeit t, dass Ergebnis ist ein und dasselbe, es wurde ein bestimmter Wegabschnitt zurückgelegt!

Die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ spiegelt immer die Beziehung zwischen Weg und Zeitabschnitten wieder, welche bei 0 beginnen. Die Beziehung $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ geht für $s_0 = 0 \wedge t_0 = 0$ in die Ausgangsgleichung $v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{s}{t}$ über!

Allgemein ist festzuhalten

In einem Intervall $[t_1 / t_2]$ ist die Fläche unter dem Graphen einer Weg-Zeit Funktion der Weg den der Massenpunkt in diesem Zeitintervall zurückgelegt hat.

2.5 Die Zeit-Weg-Funktion mit Anfangswert

Für $t_0 = 0$ gilt $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t} \Leftrightarrow s - s_0 = v \cdot t \Leftrightarrow s = v \cdot t + s_0$, wobei s_0 der Weg ist, welcher schon zum Zeitpunkt $t = 0$ von dem Wagen zurückgelegt worden ist. Für $s_0 = 0$ ergibt sich natürlich wieder die normale Geschwindigkeitsgleichung.

2.6 Die mathematische Form der Geschwindigkeitsgleichung

Es handelt sich bei der Funktion, deren Graph oberhalb im Weg-Zeit-Diagramm zu sehen ist, um eine affine[6] Funktion, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft. Wenn man den Quotienten $\frac{s}{t}$ genauer betrachtet, so fällt einem eine Übereinstimmung mit der Berechnung der Steigung einer Geraden. Bei einer solchen affinen Funktion ist $m = \frac{y}{x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$[7]. Analog bedeute das: $v = \frac{s}{t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Man bezeichnet den Bruch $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ auch als **Differenzenquotient**, da die Differenz der Wege durch die Differenz der Zeiten geteilt wird. Allgemein nennt man in der Mathematik Geraden an einen

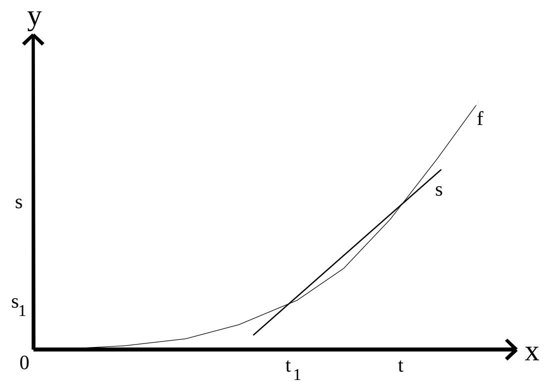
[6]affine Funktion, eine ganzrationale Funktion ersten Grades z. B. $y = m \cdot x + b$.

[7]Es handelt sich bei dem mathematische Operator Δ um den griechische Großbuchstabe **Delta**. Der Operator ist eine verkürzte Schreibweise für das Berechnen der Differenz zweier Werte einer physikalischen Größe. Es gilt: $\Delta s = s_2 - s_1$. Es handelt sich hierbei um den Abstand der beiden Punkte voneinander.

Funktionsgraphen **Sekanten**. Der Differenzenquotient ist aber nichts anderes als die Steigung selbiger. Die Geschwindigkeitsgleichung aus §2.4 ist dann die Geradengleichung für die Sekante.

Handelt es sich bei dem Graphen einer Weg-Zeit-Funktion nicht um eine Gerade, so liegt auch keine gleichförmige geradlinige Funktion vor, die Geschwindigkeit ändert sich,

wie bei dem unten stehenden Funktionsgraphen zu beobachten ist:



Sekante s an den Funtktionsgraphen von f .

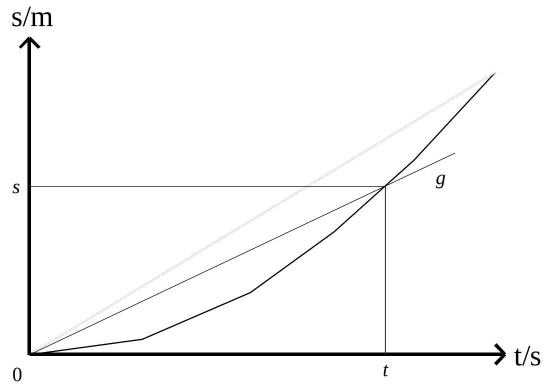
Sollte nun ein Punkt, hier (t/s) gewählt werden und nun hiervon ausgehend die Steigung der Sekanten mittels eines zweiten variablen Punktes berechnet werden, so erhält man: $s_k(t_1) = \frac{s - s_1}{t - t_1}$.

2.7 Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit

Bisher habe ich immer nur von Geschwindigkeit gesprochen. Tatsächlich gibt es aber zwei verschidene „Arten“ von Geschwindigkeiten, nämlich die **Momentangeschwindigkeit** und die **Intervall-** oder **Durchschnittsgeschwindigkeit**, die auch als **mittlere Geschwindigkeit** bezeichnet wird. Unter der ersteren, der Momentangeschwindigkeit, sie ist es die uns besonders interessiert, versteht man die Geschwindigkeit, mit welcher sich beispielsweise ein Körper zu einem bestimmten *Zeitpunkt* bewegt. Die Durchschnittsgeschwindigkeit bezieht sich immer auf einen *Zeitabschnitt*, währenddem sich der Körper bewegt hat, und gibt die Schnelligkeit an, die ein sich gleichförmig bewegender Körper haben müsste, um während des gegebenen Zeitabschnittes den gleichen Weg zurückzulegen, wie der beschleunigte Körper.
Betrachten wir zuerst die geradlinige gleichförmige Bewegung. Hierbei hat die Geschwindigkeit immer einen konstanten Wert, sie ändert sich nicht! Zu jedem Zeitpunkt und über jedem Zeitintervall ist die Geschwindigkeit also gleich, da der Quotient aus Weg und Zeit konstant ist, ist die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt *t* immer gleich der Geschwindigkeit über einem Intervall Δt.

Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit sind bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung wertgleich.

Anders ist es, wenn z. B. ein Ball aus einer bestimmten Höhe auf die Erde fällt, so ist seine immer größer werdende Geschwindigkeit mit dem Auge leicht festzustellen. Er ist zuerst in Ruhe und wird dann immer schneller. In einem Zeit-Weg-Diagramm ergibt das keine Gerade mehr, sondern, in diesem Fall, eine Parabel:



Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm) .

Der Quotient aus Wegabschnitt und Zeitabschnitt ist nicht mehr gleich der Momentangeschwindigkeit, sondern nur noch die mittlere Geschwindigkeit. Momentangeschwindigkeit kürzt man mit *v* ab, durchschnittliche Angaben kennzeichnet man mit einem Strich über der physikalischen Größe: $\overline{v}$ (gelesen: „*v* mittel“). Graphisch ist die mittlere Geschwindigkeit die Steigung der Strecke welche die beiden Messpunkte, hier $(0/0)$ und (t/s), verbindet (Ist in dem Diagramm mit g bezeichnet worden). Der Strahl g ist der Funktionsgraph des Weg-Zeit-Gesetzes der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, wobei für die Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit über dem Intervall von 0 bis *t* eingesetzt wurde.
Die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit ist kein Problem. Man verwendet lediglich zwei Paar Messwerte, jeweils Zeit und Weg, und setzt sie in die Gleichung für die Geschwindigkeit ein, dass heißt man bildet den Quotienten aus den Weg- und Zeitdifferenzen.
Kompliziert wird es bei der Momentangeschwindigkeit. Es gilt das Zeitintervall Δt soweit zu verkleinern, dass der Fehler, den die Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt, immer kleiner wird. Die an den Weg-Zeit-Graphen gezeichneten Sekanten nähern sich immer näher der Tangenten[8]. Die Gleichung für die Sekantensteigung ist die allseits bekannte Gleichung $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Lässt man den zweiten Messpunkt immer näher zu dem Laufen, von dem man die Geschwindigkeit bestimmen möchte, so werden Δt und das zugehörige Δs beliebig klein. Die beiden Messpunkte dürfen natürlich nie identisch sein, da sonst $\Delta t = t - t = 0$ wird und der Quotient nicht definiert ist. Der Mathematiker schreibt deshalb $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Dieser Ausdruck, **Grenzwert** genannt, bedeutet, dass Δt beliebig klein wird, aber null nie erreicht.

2.8 Die Geschwindigkeit als Vektor

D2.6 ***(Definitionsgleichung für die Geschwindigkeit)*****:** Die Gleichung der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung ist ein Spezialfall von D3.7. Für $\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = const.}$ ist die Intervallgeschwindigkeit gleich der Momentangeschwindigkeit. Die Steigung der Sekanten ist dann gleich der Steigung der Tangenten, jeweils bezüglich eines Punktes. Für $s_0 = 0 \wedge t_0 = 0$ lautet die Gleichung: $v = \frac{s}{t}$.

D2.2 ***(Geschwindigkeit allgemein)*****:** Unter Geschwindigkeit versteht man im allgemeinen die Änderung einer Größe mit der Zeit. Je schneller diese Änderung erfolgt, gleiche Zeiteinheiten vorausgesetzt, desto geschwinder vollzieht sich der Vorgang. Für gewöhnlich haben alle diese Festlegungen ein Schreibweise gemein, dass sich eine Physikalische Größe.

[8]Eine Tangente berührt den Funktionsgraphen in genau einem Punkt. Bei einem Kreis steht sie senkrecht auf dem Radius.