Grundlagen

Satz 1.1:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1$$

Definition 1.1: Die für alle $n, k \in \mathbb{N}$ definierte Funktion $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } 0 \leq n < k \end{cases}$$

heißt *Binomialkoeffizient*. Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ wird der Binomialkoeffizient wie folgt definiert

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} & \text{für } k > 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}.$$

Satz 1.2: Der Binomialkoeffizient hat mit $n, k \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(Symmetriesatz)}$$

$$\binom{a+1}{k+1} = \binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} \qquad (\textit{Additionssatz})$$

$$\binom{a}{0}+\binom{a+1}{1}+\binom{a+2}{2}+\cdots+\binom{a+k}{k} = \binom{a+k+1}{k} \qquad \text{(Additionstheoreme)}$$

$$\binom{a}{0}\binom{b}{k} + \binom{a}{1}\binom{b}{k-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{k-2} + \cdots + \binom{a}{k}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{k}$$

Satz 1.3: Es sei $n \geq 1$. Dann gilt:

(a) Permutation ohne Wiederhohlung $P(n,k) = k!\binom{n}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

(b) Permutationen mit Wiederholung $W(n,k) = n^k$ für $k \geq 1$.

(c) Kombinationen $K(n,K) = \binom{n}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

Definition 1.2: Die metrischen Axiome.

$$d(a,b) \geq 0 \wedge d(a,b) = 0 \iff a = b \qquad \text{(Definitheit)}$$

$$d(a,b) = d(b,a) \qquad \text{(Symmetrie)}$$

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Definition 1.3: Eine Menge M reeller Zahlen heißt *nach* $\begin{cases} \textit{unten} \\ \textit{oben} \end{cases}$ *beschränkt*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\forall x \in M : \begin{cases} a \leq x \\ x \leq a \end{cases}$$

ist. Jedes derartige a wird eine $\begin{cases} \textit{untere} \\ \textit{obere} \end{cases}$ *Schranke* von M genannt.

Definition 1.4: Eine reelle Zahl S heißt $\begin{cases} \textit{größte untere} \\ \textit{kleinste obere} \end{cases}$ *Schranke* oder $\begin{cases} \textit{Infimum} \\ \textit{Supremum} \end{cases}$ von M, wenn $S \begin{cases} \text{untere} \\ \text{obere} \end{cases}$ Schranke von M ist und überdies *keine* Zahl $\begin{cases} > S \\ < S \end{cases}$ noch $\begin{cases} \text{untere} \\ \text{obere} \end{cases}$ Schranke von M sein kann, daß heißt, wenn es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ mindestens ein $x \in M$ mit $\begin{cases} x < S + \varepsilon \\ x > S - \varepsilon \end{cases}$ gibt.

Satz 1.4 (Vollständigkeitsaxiom, Supremumsprinzip): Jede nicht leere nach $\begin{cases} \text{unten} \\ \text{oben} \end{cases}$ beschränkte Menge besitzt ein $\begin{cases} \text{Infimum} \\ \text{Supremum} \end{cases}$.

Satz 1.5 (Archimedes): Jede reelle Zahl wird von einer natürlichen Zahl übertroffen.

Satz 1.6 (Eudoxos): Zu *jedem* $\varepsilon > 0$ gibt es ein natürliches n, so daß $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ausfällt. Für alle natürlichen $m > n$ ist dann erst recht $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

Satz 1.7: Sei ρ eine reelle Zahl. Dann gibt es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ eine rationale Zahl r, für die $\rho - \varepsilon < r < \rho + \varepsilon$ gilt.

Satz 1.8: Besitzt die nicht leere Menge A zwar ein $\begin{cases} \text{Infimum} \\ \text{Supremum} \end{cases}$, jedoch *kein* $\begin{cases} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{cases}$, so gibt es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ unendlich viele Elemente von A, für die

$$\begin{cases} \inf A - \varepsilon \\ \sup A - \varepsilon \end{cases} < a < \begin{cases} \inf A \\ \sup A \end{cases}.$$

Folgen

Definition 2.1 (Nullfolge): Eine Folge (a_n) heißt *Nullfolge*, in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ derart gibt, daß für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n| < \varepsilon$. In Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 :\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n| < \varepsilon.$$

Man sagt dann auch, die Folge (a_n) *strebt* oder *konvergiert* gegen Null für $n \to \infty$.

Definition 2.2: Eine Folge (a_n) heißt *konvergent* mit dem *Limes* oder *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to \infty,$$

wenn die Folge $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist. Man sagt dann auch, die Folge (a_n) *strebt* oder *konvergiert* gegen a für $n \to \infty$. Nach Definition 2.1 bedeutet das, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

Satz 2.1: Jede konvergente Folge ist beschränkt und ihr Limes ist eindeutig bestimmt.

Satz 2.2 (Rechenregeln):

(a) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ falls } b \neq 0,$$

(b) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^p = a^p \text{ für } p \in \mathbb{N}.$$

(c) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ sowie $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$. Aus $a_n \geq 0$ folgt also $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

Satz 2.3 (Sandwich Theorem): Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, sowie $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n. Dann ist auch die Folge (c_n) konvergent mit Limes a.

Satz 2.4 (Konvergenzkriterium von Cauchy): Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so daß

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N(\varepsilon) \text{ ist.}$$

Satz 2.5: Jede Umordnung und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist ebenfalls konvergent mit dem selben Limes, Dasselbe gilt, wenn man endlich viele Glieder einer konvergenten Folge abändert.

Satz 2.6 (Monotoniekriterium): Für eine beschränkte, monotone Folge (a_n) ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup_n a_n & \text{wenn } (a_n) \text{ wachsend} \\ \inf_n a_n & \text{wenn } (a_n) \text{ fallend} \end{cases}.$$

Lemma 2.1: Eine reelle Zahl a ist genau dann Häufungswert einer Folge (a_n), wenn die Folge eine gegen a konvergierende Teilfolge besitzt.

Satz 2.7 (Bolzano-Weierstraß für Folgen): Jede beschränkte Folge (a_n) hat mindestens einen Häufungswert. Genauer: Es gibt einen größten Häufungswert a^* und einen kleinsten Häufungswert a_* und bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sind höchstens endlich viele Glieder $a_n > a^*+\varepsilon$ und ebenso höchstens endlich viele Glieder $a_n < a_* - \varepsilon$.

Definition 2.3: Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt eine beschränkte Folge (a_n) einen größten Häufungspunkt a^* und einen kleinsten Häufungspunkt a_*. Man nennt a^* den *oberen Limes* oder *Limes superior*, a_* den *unteren Limes* oder *Limes inferior* der Folge (a_n) und schreibt dafür

$$a^* =: \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad a_* =: \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Unendliche Reihen

Definition 3.1: Es sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$) gegeben. Man nennt das Symbol

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \qquad \text{oder} \qquad a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots$$

eine *unendliche Reihe*, a_n das *n-te Glied*,

$$s_n := \sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + \ldots + a_n$$

die *n-te Teilsumme* und die unendliche Reihe

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

den *n-ten Rest* der Reihe. In den meisten Fällen ist $p = 0$ oder $p = 1$. Die Reihe $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent*, wenn die Folge ihrer Teilsummen $(s_n)_p^{\infty}$ konvergent ist. Die Zahl

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=p}^{n} a_i$$

nennt man in diesem Fall die *Summe* der Reihe und man schreibt

$$S = \sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots\ .$$

Eine unendliche Reihe heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist. Ist insbesondere die Folge (s_n) bestimmt divergent mit dem Limes $\pm\infty$, so schreibt man dafür

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Satz 3.1: Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann bilden sowohl die Reihenglieder a_n als auch die Reste $r_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ eine Nullfolge.

Satz 3.2: Eine unendliche Reihe $\sum a_n$ mit nichtnegativen Gliedern ist konvergent, wenn die Folge ihrer Teilsummen beschränkt ist, andernfalls bestimmt divergent. In beiden Fällen gilt die Gleichung

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \sup_n s_n.$$

Satz 3.3 (Majorantenkriterium): Ist $0 \le a_n \le c_n$ für fast alle n und $\sum c_n$ konvergent, so ist auch $\sum a_n$ konvergent.

Satz 3.4 (Minorantenkriterium): Ist $0 \le d_n \le a_n$ für fast alle n und $\sum d_n$ divergent, so ist auch $\sum a_n$ divergent.

Satz 3.5 (Konvergenzkriterium von Cauchy): Die Reihe $\sum a_n$ ist dann und nur dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle $n > m \ge N(\varepsilon)$ gilt

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

Definition 3.2: Eine unendliche Reihe $\sum a_n$ ist heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert.

Satz 3.6: Eine absolut konvergente Reihe $\sum a_n$ ist auch konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung für unendliche Reihen

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=p}^{\infty} |a_n|.$$

Satz 3.7 (Wurzelkriterium): Existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ derart, daß

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1 \qquad \text{für fast alle } n \iff \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ist, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1 \qquad \text{für unendlich viele } n \iff \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

so ist $\sum a_n$ divergent.

Satz 3.8 (Quotientenkriterium): Ist $a_n \neq 0$ und existiert eine Zahl q mit $0 < q < 1$ derart, daß

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \qquad \text{für fast alle } n \iff \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

ist, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Ist dagegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1 \qquad \text{für fast alle } n \iff \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

so ist $\sum a_n$ divergent.

Satz 3.9 (Umordnungssatz): Eine absolut konvergente Reihe darf man umordnen. Genauer: Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und (b_n) eine Umordnung von (a_n) so gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, wobei auch die zweite Reihe absolut konvergent ist.

Satz 3.10: Sind die unendlichen Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent, so kann ihr Produkt durch gliedweise Multiplikation berechnet werden,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j,$$

und die entstehende Doppelreihe ist absolut konvergent.

Satz 3.11 (Cauchy-Produkt): Eine Umordnung der Doppelreihe $\sum a_i b_j$ nach Diagonalen ergibt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

mit

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Satz 3.12: Die Binomialreihe

$$B(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

ist für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| < 1$ divergent. Das Cauchy-Produkt zweier solcher Reihen ist

$$B(x,\alpha)B(x,\beta) = B(x,\alpha+\beta) \qquad \text{für } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \text{ und } |x| < 1.$$

Definition 3.3: Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt *Potenzreihe*, die Zahlen a_n nennt man *Koeffizienten*.

Satz 3.13: Jede Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besitzt einen Konvergenzradius r, $r \in \mathbb{R}_0^+$, mit der Eigenschaft, daß die Reihe für $\begin{cases} |x| < r \text{ absolut konvergiert} \\ |x| > r \text{ divergiert} \end{cases}$. Der Konvergenzradius hängt nur von $|a_n|$ ab und berechnet sich nach der Formel von Cauchy-Hadamard

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei hier $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ festgelegt wird. Für viele Anwendungen günstiger, aber nicht universell gültig ist $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Satz 3.14 (Wichtige Potenzreihen):

(a) Die Exponentialfunktion $\exp x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(b) Die logarithmische Reihe $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ $(|x| < 1)$

(c) Der Sinus $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(d) Der Cosinus $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Satz 3.15: Jede echt gebrochene reelle rationale Funktion $r = \frac{q}{q}$ $(p,q$ reell$)$ besitzt, wenn p durch die reelle Produktdarstellung $p(x) = (x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+a_1x+b_1)^{q_1}\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{q_l}$ gegeben ist, eine reelle Partialbruchdarstellung der Form

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+A_ix+B_i)^j}$$

mir reellen Koeffizienten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.

Grenzwert, Stetigkeit

Definition 4.1: Die reellwertige Funktion f sei in einer punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von $x_0 \in \mathbb{R}$ erklärt. Man sagt, f *strebt* (oder *konvergiert*) gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$ und schreibt dafür

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to a \text{ für } x \to x_0,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ für alle } x \neq x_0 \text{ mit } |x - x_0| < \delta,$$

also für $x \in \dot{V}_\delta(x_0)$ ist (für hinreichend kleines δ ist $\dot{V}_\delta(x_0) \subseteq \dot{U}(x_0)$).

Definition 4.2 (Uneigentliche Grenzwerte): Es sei D eine Menge reeller Zahlen mit dem Häufungspunkt x_0. Für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bedeutet

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad (\text{in } D)$$

daß zu jeder reellen Zahl C ein $\delta > 0$ existiert, so daß die Beziehung

$$f(x) > C \text{ für alle } x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap D$$

gilt.

Satz 4.1 (Konvergenzkriterium von Cauchy): Es sei f auf der Menge D mit dem Häufungspunkt x_0 definiert. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)(in\ \mathrm{D})$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ ist für alle } x, y \in \dot{V}_\delta(x_0) \cap D.$$

Satz 4.2 (Rechenregeln): Es existiere $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, dann existieren auch nachfolgende Limites

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ letzteres falls } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Aus $f(x) \leq g(x)$ in D folgt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Sandwich Theorem: Gilt $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in D sowie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, und alle drei Limites sind gleich.

Satz 4.3 (Kompositionen): Die Funktionen f, g seien auf D_f, D_g mit $f(d_f) \subseteq D_g$ definiert. Dann ist $h = g \circ f$ auf D_f erklärt und, wenn f stetig in $x_0 \in D_f$ und g stetig in $y_0 := f(x_0)$, so ist $h = g \circ f$ stetig in x_0.

Definition 4.3: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a existiert, so daß gilt

$$f(U \cap D) \subseteq V.$$

Definition 4.4: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt

$$|x - a| < \delta, x \in D \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Satz 4.4: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $a \in D$ stetig genau dann, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Satz 4.5: Die auf der Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f heißt *gleichmäßig stetig* auf D, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart existiert, daß

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta$$

gilt.

Definition 4.5: Ist die Funktion f an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge D stetig, so heißt f *stetig über* D. Man sagt dann kurz: f ist eine stetige Funktion.

Satz 4.6: $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei Funktion mit Definitionsbereich $D_f = M \cup N$ mit $M \cap N = \emptyset$ und M, N offene Mengen, so gilt: f ist stetig auf M und auf N genau dann, wenn f stetig ist.

Definition 4.6: Man sagt, die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$) genüge auf D einer *Lipschitz-Bedingnung* (oder f sei auf D *dehnungsbeschränkt*), wenn es eine Konstante L gibt, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für } x, y \in D$$

ist. Man nennt L eine *Lipschitzkonstante* für f. Genügt f über D einer Lipschitz-Bedingnung, so schreibt man dafür $f \in \mathrm{Lip}(D)$; Man sagt auch kurz f sei eine *Lipschitz-Funktion*.

Lemma 4.1: Mit f und g gehören auch λf und $f + g$ zu $\mathrm{Lip}(D)$. Ist D beschränkt, so gilt dasselbe für $f \cdot g$. Kurz: Die Klasse $\mathrm{Lip}(D)$ ist ein Funktionenraum, bei beschränktem D sogar eine Funktionenalgebra. Insbesondere genügt jedes Polynom auf einem beschränkten Intervall einer Lipschitz-Bedingung.

Satz 4.7: Jede Lipschitz-Funktion ist an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge stetig.

Satz 4.8: Die rationalen Funktionen, die Logarithmenfunktionen, die trigonometrischen Funktionen sowie alle durch Potenzreihen definierte Funktionen sind an jeder Stelle ihrer jeweiligen Definitionsmenge stetig.

Definition 4.7: Die Funktion f sei stetig auf D. Man nennt jede auf einer Menge $M \supseteq D$ stetige Funktion g, welche auf D mit f übereinstimmt, eine *stetige Fortsetzung* von f (auf M).

Topologie der reellen Zahlen

Definition 5.1: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ heißt *innerer Punkt von M*, wenn es eine Umgebung U von x gibt, die in M enthalten ist.

$x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt von M*, wenn in jeder Umgebung U von x ein $y \in M$ liegt, das von x verschieden ist.

x heißt *Berührpunkt* von M, wenn in jeder Umgebung U von x ein $y \in M$ liegt ($y \neq x$ wird nicht gefordert!)

x heißt *isolierter Punkt* von M, wenn $x \in M$ und eine Umgebung U von x existiert, in der außer x keine Punkte von M liegen. (Ein Berührpunkt von M ist also entweder Häufungspunkt oder isolierter Punkt von M.)

x heißt *Randpunkt* von M, wenn in jeder Umgebung U von x ein $y \in M$ und ein $z \in \mathbb{R} \setminus M$ liegt.

Definition 5.2: Ist jeder Punkt der Menge M innerer Punkt von M, so heißt die Menge M *offen*.

Gehört jeder Häufungspunkt von M zu M, so heißt die Menge M *abgeschlossen*.

Satz 5.1: Eine Menge M ist genau dann abgeschlossen, wenn ihre Komplementärmenge offen ist.

Satz 5.2: Die Vereinigung eines beliebigen Systems offener Mengen ist eine offene Menge. Der Durchschnitt eines endlichen Systems offener Mengen ist eine offene Menge.

Satz 5.3: Der Durchschnitt eines beliebigen Systems abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge. Die Vereinigung eines endlichen Systems abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.

Satz 5.4: Ist x Häufungspunkt von M und U eine Umgebung von x, so liegen in U sogar unendlich viele Elemente von M.

Satz 5.5 (Bolzano-Weierstraß): Jede unendliche beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Definition 5.3: Ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, so heißt sie *kompakt* (oder ein *Kompaktum*).

Satz 5.6: Ein nicht leeres Kompaktum M besitzt ein Minimum und ein Maximum (daß heißt $\inf M$ und $\sup M$ gehöhren zu M).

Satz 5.7: Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge M besitzt einen Häufungspunkt, der zu M gehört.

Satz 5.8: Eine Menge M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge mit Werten in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Definition 5.4: Es sei jedem $x \in M$ eine Umgebung $U(x, \varepsilon(x))$ zugeordnet (daß heißt die Funktion $\varepsilon : M \to \mathbb{R}^+$ sei vorgegeben). Das System $\mathfrak{U}$ aller dieser Umgebungen überdeckt natürlich die Menge M, daß heißt

$$M \subseteq \bigcup_{x \in M} U(x, \varepsilon(x)).$$

Man nennt $\mathfrak{U}$ eine *offene Überdeckung* von M.

Definition 5.5: Wenn es nun zu jeder solchen Überdeckung $\mathfrak{U}$ endlich viele Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ gibt derart, daß auch schon

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k, \varepsilon(x_k))$$

gilt, dann sagt man: M hat die *Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft*.

Satz 5.9 (Heine-Borel): Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann Kompakt, wenn sie die Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft besitzt.

Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.1: Ist f stetig und die Definitionsmenge D von f kompakt, so ist auch die Bildmenge $f(D)$ kompakt.

Insbesondere nimmt f Minimum und Maximum in D an.

Satz 6.2: Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv sowie D kompakt. Dann ist auch $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 6.3: Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

Satz 6.4 (Zwischenwertsatz): Ist f in $I = [a; b]$ stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Satz 6.5 (Nullstellensatz): Ist f in $I = [a; b]$ stetig, $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann hat f mindestens eine Nullstelle in I. Genauer: Es gibt eine erste Nullstelle c_1 und eine letzte Nullstelle c_2 mit $a < c_1 \leq c_2 < b$, und f ist positiv in $[a; c_1[$ und negativ in $]c_2; b]$.

Korollar 6.1: Es sei I ein beliebiges Intervall und f stetig auf I. Dann ist $f(I)$ ein Intervall, und zwar das Intervall $]\inf f(I); \sup f(I)[$, eventuell mit Einschluß von Randpunkten.

Satz 6.6: Das stetige Bild eines kompakten Intervalls ist ein kompaktes Intervall.

Satz 6.7: Ist f in $[a; b]$ stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

Satz 6.8: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv und ist D offen, dann ist $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig.